**Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague,**
7me série, Section des Sciences, t. X, nº 3

# RECHERCHES

SUR LES

# NOMBRES DE BERNOULLI

PAR

NIELS NIELSEN

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Række, naturvidensk. og mathem. Afd. X. 3

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1913

Pris: 2 Kr. 40 Øre

# Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter,

## 6te Række.

### Naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling.

| | | Kr. | Øre |
|---|---|---|---|
| | **I**, med 42 Tavler, 1880—85 | 29. | 50. |
| 1. | **Prytz, K.** Undersøgelser over Lysets Brydning i Dampe og tilsvarende Vædsker. 1880 | » | 65. |
| 2. | **Boas, J. E. V.** Studier over Decapodernes Slægtskabsforhold. Med 7 Tavler. Résumé en français. 1880 | 8. | 50. |
| 3. | **Steenstrup, Jap.** Sepiadarium og Idiosepius, to nye Slægter af Sepiernes Familie. Med Bemærkninger om to beslægtede Former Sepioloidea D'Orb. og Spirula Lmk. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1881 | 1. | 35. |
| 4. | **Colding, A.** Nogle Undersøgelser over Stormen over Nord- og Mellem-Europa af 12te—14de Novb. 1872 og over den derved fremkaldte Vandflod i Østersøen. Med 23 Planer og Kort. Résumé en français. 1881 | 10. | » |
| 5. | **Boas, J. E. V.** Om en fossil Zebra-Form fra Brasiliens Campos. Med et Tillæg om to Arter af Slægten Hippidion. Med 2 Tavler. 1881 | 2. | » |
| 6. | **Steen, A.** Integration af en lineær Differentialligning af anden Orden. 1882 | » | 50. |
| 7. | **Krabbe, H.** Nye Bidrag til Kundskab om Fuglenes Bændelorme. Med 2 Tavler. 1882 | 1. | 35. |
| 8. | **Hannover, A.** Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Anencephalia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 2 Tavler. Extrait et explication des planches en français. 1882 | 1. | 60. |
| 9. | —— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Cyclopia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 3 Tavler. Extrait et explic. des planches en français. 1884 | 4. | 35. |
| 10. | —— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Synotia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 1 Tavle. Extrait et explic. des planches en français. 1884 | 1. | 30. |
| 11. | **Lehmann, A.** Forsøg paa en Forklaring af Synsvinklens Indflydelse paa Opfattelsen af Lys og Farve ved direkte Syn. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1885 | 1. | 85. |
| | **II**, med 20 Tavler, 1881—86 | 20. | » |
| 1. | **Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 1ste Afhandling. Med 6 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1881 | 3. | 15. |
| 2. | **Lorenz, L.** Om Metallernes Ledningsevne for Varme og Elektricitet. 1881 | 1. | 30. |
| 3. | **Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 2den Afhandling. Med 9 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1882 | 5. | 30. |
| 4. | **Christensen, Odin.** Bidrag til Kundskab om Manganets Ilter. 1883 | 1. | 10. |
| 5. | **Lorenz, L.** Farvespredningens Theori. 1883 | » | 60. |
| 6. | **Gram, J. P.** Undersøgelser ang. Mængden af Primtal under en given Grænse. Résumé en français. 1884 | 4. | » |
| 7. | **Lorenz, L.** Bestemmelse af Kviksølvsøjlers elektriske Ledningsmodstande i absolut elektromagnetisk Maal. 1885 | » | 80. |
| 8. | **Traustedt, M. P. A.** Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om Salperne. Med 2 Tavler. Explic. des planches en français. 1885 | 3. | » |
| 9. | **Bohr, Chr.** Om Iltens Afvigelser fra den Boyle-Mariotteske Lov ved lave Tryk. Med 1 Tavle. 1885 | 1. | » |
| 10. | —— Undersøgelser over den af Blodfarvestoffet optagne Iltmængde udførte ved Hjælp af et nyt Absorptiometer. Med 2 Tavler. 1886 | 1. | 70. |
| 11. | **Thiele, T. N.** Om Definitionerne for Tallet, Talarterne og de tallignende Bestemmelser. 1886 | 2. | » |
| | **III**, med 6 Tavler, 1885—86 | 16. | » |
| 1. | **Zeuthen, H. G.** Keglesnitslæren i Oldtiden. 1885 | 10. | » |
| 2. | **Levinsen, G. M. R.** Spolia Atlantica. Om nogle pelagiske Annulata. Med 1 Tavle. 1885 | 1. | 10. |
| 3. | **Rung, G.** Selvregistrerende meteorologiske Instrumenter. Med 1 Tavle. 1885 | 1. | 10. |
| 4. | **Meinert, Fr.** De eucephale Myggelarver. Med 4 dobb. Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1886 | 6. | 75. |
| | **IV**, med 25 Tavler. 1886—88 | 21. | 50. |
| 1. | **Boas, J. E. V.** Spolia Atlantica. Bidrag til Pteropodernes Morfologi og Systematik samt til Kundskaben om deres geografiske Udbredelse. Med 8 Tavler. Résumé en français. 1886 | 10. | 50. |
| 2. | **Lehmann, A.** Om Anvendelsen af Middelgradationernes Metode paa Lyssansen. Med 1 Tavle. 1886 | 1. | 50. |
| 3. | **Hannover, A.** Primordialbrusken og dens Forbening i Truncus og Extremiteter hos Mennesket før Fødselen. Extrait en français. 1887 | 1. | 60. |
| 4. | **Lütken, Chr.** Tillæg til «Bidrag til Kundskab om Arterne af Slægten *Cyamus* Latr. eller Hvallusene». Med 1 Tavle. Résumé en français. 1887 | » | 60. |
| 5. | —— Fortsatte Bidrag til Kundskab om de arktiske Dybhavs-Tudsefiske, særligt Slægten *Himantolophus*. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1887 | » | 75. |
| 6. | —— Kritiske Studier over nogle Tandhvaler af Slægterne *Tursiops*, *Orca* og *Lagenorhynchus*. Med 2 Tavler. Résumé en francais. 1887 | 4. | 75. |
| 7. | **Koefoed, E.** Studier i Platosoforbindelser. 1888 | 1. | 30. |
| 8. | **Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 3die Afhandling. Med 12 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1888 | 6. | 45. |
| | **V**, med 11 Tavler og 1 Kort. 1889—91 | 15. | 50. |
| 1. | **Lütken, Chr.** Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om de tre pelagiske Tandhval-Slægter *Steno*, *Delphinus* og *Prodelphinus*. Med 1 Tavle og 1 Kort. Résumé en français. 1889 | 2. | 75. |
| 2. | **Valentiner, H.** De endelige Transformations-Gruppers Theori. Résumé en français. 1889 | 5. | 50. |
| 3. | **Hansen, H. J.** Cirolanidæ et familiæ nonnullæ propinquæ Musei Hauniensis. Et Bidrag til Kundskaben om nogle Familier af isopode Krebsdyr. Med 10 Kobbertavler. Résumé en français. 1890 | 9 | 50. |
| 4. | **Lorenz, L.** Analytiske Undersøgelser over Primtalmængderne. 1891 | » | 75. |

(Fortsættes paa Omslagets S. 3.)

# RECHERCHES

SUR LES

# NOMBRES DE BERNOULLI

PAR

NIELS NIELSEN

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter. 7. Række, naturv. og mathematisk Afd. X. 3

KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1913

# Introduction.

La méthode classique d'EULER[1]), suivie dans l'étude des nombres de BERNOULLI, des coefficients des tangentes et des nombres d'EULER ou coefficients des sécantes, est fondée sur les séries de puissances obtenues pour les fonctions méromorphes élémentaires

$$(1) \qquad \operatorname{tg} x\,, \quad \frac{1}{x} - \cot x\,, \quad \frac{x}{\sin x}, \quad \frac{1}{\cos x}, \quad \frac{x}{1-e^{-x}}, \quad \frac{2}{1+e^{-x}}$$

combinées avec les propriétés fondamentales de ces fonctions et avec les séries de puissances toujours convergentes obtenues pour les fonctions entières

$$(2) \qquad \sin x\,, \quad \cos x\,, \quad e^{-x}.$$

Or, désignons par $\alpha$ un nombre complexe quelconque, puis combinons les séries (1) avec celles obtenues pour les puissances

$$(3) \qquad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\alpha}, \quad (\cos x)^{\alpha}, \quad \left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^{\alpha}, \quad \left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)^{\alpha},$$

nous verrons que les formules classiques, concernant les nombres susdits, ne sont que des représentants isolés d'une infinité de formules de ce genre.

L'illustre GÖPEL[2]), déjà en 1843, a remarqué de telles généralisations des formules classiques, et il ajoute:

Da man sich dem Obigen zufolge Recursionsformeln in beliebiger Menge verschaffen kann, so möchte es nicht von grosser Erheblichkeit sein, deren neue aufzusuchen; es gelänge denn eine solche aufzufinden, die einen tieferen Blick in den Bau dieser Zahlen verstattete.

---

[1]) Opuscula analytica, t. II, p. 257—274; Saint-Petersbourg 1785. Voir, pour des recherches ultérieures d'autres géomètres, la belle Monographie de M. LOUIS SAALSCHÜTZ: Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen. Berlin 1893.

[2]) Archiv de Grunert, t. 3, p. 65; 1843.

Cette réserve de GÖPEL, dans ses remarques relatives à une Note de SCHLÖMILCH [1]), est très intéressante; car HERMITE [2]) et STERN [3]) ont appliqué, précisément de la manière indiquée par GÖPEL, les formules récursives de MOIVRE et de JACOBI pour les nombres de BERNOULLI.

De plus, il faut ajouter que des formules récursives, d'une forme très bizarre nous le verrons, sont très utiles et dans la théorie des nombres en question et dans la théorie des nombres en général. C'est-à-dire qu'il est impossible de condamner dès à présent comme étant sans valeur une telle formule récursive.

Quant à la méthode classique que nous venons de mentionner, nous remarquons expressément, qu'il nous semble peu naturel et peu systématique de fonder l'étude des nombres rationnels en question sur des éléments purement transcendants. De plus, une théorie élémentaire et directe est beaucoup plus simple et générale que la méthode classique.

On pourrait dire que les résultats classiques concernant les nombres $B_n$, $T_n$ et $E_n$ sont trouvés par hasard, sans méthodes générales et systématiques.

En effet, on sait que des formules très analogues sont trouvées séparément et par des considérations très différentes, tandis que de telles formules sont en réalité des cas particuliers d'une même formule générale, comme nous le verrons plusieurs fois dans les pages suivantes.

Comme un exemple caractéristique de ce genre, nous prenons les formules récursives incomplètes, déduites dans le chapitre IV à l'aide d'un seul polynome entier. De cette manière nous obtenons d'un seul coup toutes les formules connues de ce genre et un grand nombre d'autres.

Pour citer un autre exemple, nous remarquons que les formules récursives générales contenues dans les paragraphes 11, 12 et 13, savoir les formules d'EULER et de BERNOULLI concernant des sommes de puissances numériques, nous donnent comme des cas particuliers un nombre de formules classiques déduites séparément et par des considérations très différentes.

Remarquons en passant que les formules de BERNOULLI et d'EULER ne sont que des cas particuliers des deux équations aux différences finies qui figurent dans nos définitions de $\varphi_n(x)$ et $\chi_n(x)$.

On sait que la méthode développée dans le paragraphe 7 est très connue — pour des valeurs entières de la variable $x$.

La méthode du paragraphe 9, nouvelle peut-être, est essentielle dans la théorie des nombres $B_n$, $T_n$ et $E_n$.

En effet, nous déduisons à l'aide d'une formule récursive, d'une certaine forme très générale, pour les $B_n$ ou les $T_n$ une identité algébrique contenant une variable complexe, identité qui est une conséquence immédiate de la formule numérique

---

[1]) Archiv de Grunert, t. 3, p. 9—18; 1843.

[2]) Journal de Crelle, t. 81, p. 93—95; 1876.

[3]) Ibid. t. 84, p. 267—269; 1878.

susdite. De cette manière nous pouvons traiter, en même temps, les trois groupes de nombres $B_n$, $T_n$ et $E_n$.

Remarquons que les formules très générales et très remarquables de M. HAUSSNER[1]) sont de la forme susdite[2]) et que la plupart des formules récursives connues ont la même propriété.

Dans un Mémoire récent[3]) j'ai étudié les suites harmoniques comme des généralisations des suites formées des $\varphi_n(x)$ et des $\chi_n(x)$, mais sans appliquer aux nombres $B_n$, $T_n$ et $E_n$ les résultats généraux ainsi obtenus.

Une telle application est le but principal du présent Mémoire, tandis que je me réserve de revenir, à une autre occasion, sur les applications des résultats ainsi trouvés à la formule sommatoire d'EULER et MACLAURIN et à la théorie des nombres.

On voit que ma méthode est entièrement élémentaire, parce qu'elle n'exige que la formule binomiale d'un exposant positif entier et, ce qui est la même chose, la formule de TAYLOR pour un polynome entier.

Quant aux résultats ainsi obtenus, ils me semblent exiger une révision profonde de toute notre connaissance relative aux nombres de BERNOULLI. On peut comparer encore notre généralisation du théorème de LIPSCHITZ.

J'ai ajouté la Table des simples formules récursives pour la clarté du texte. La Table ne contient que des formules de la forme la plus simple, et il faut remarquer que la plupart de ces formules sont obtenues en donnant, dans des formules beaucoup plus générales, des valeurs particulières à un paramètre.

Or, les formules de la Table étant aussi simples que leurs représentants épars connus et classiques, il est évident que ces formules classiques sont trouvées par hasard, sans méthodes systématiques et générales.

J'indique par un astérisque ajouté au numéro, que je me rapelle avoir vu autrefois la formule récursive en question; cependant je ne peux pas prétendre que ces indications soient complètes.

---

[1]) Göttinger Nachrichten 1893, p. 777—809.

[2]) J'ai réussi à généraliser, par la méthode susdite, les formules de M. HAUSSNER qui se présentent comme des réprésentants isolés d'une grande classe de formules de ce genre. Le Mémoire en question paraîtra dans les *Berichte der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.*

[3]) Le Mémoire paraîtra dans les *Annales de l'École Normale.*

Copenhague, le 29 septembre 1912.

*Niels Nielsen.*

# CHAPITRE I.

## Les fonctions de Bernoulli et d'Euler.

### § 1. **Remarques sur les suites harmoniques.**

Nous désignons comme suite harmonique une suite illimitée de polynomes entiers

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{1}$$

qui satisfont aux deux conditions suivantes:

1° $f_n(x)$ est toujours du degré $n$ par rapport à $x$.

2° Supposons $n \geqq 1$, nous aurons constamment

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x). \tag{2}$$

Désignons par

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \tag{3}$$

une suite illimitée quelconque, telle que $|a_0| > 0$, puis posons pour $n \geqq 0$

$$f_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{a_s x^{n-s}}{(n-s)!}, \tag{4}$$

il est évident que les polynomes $f_n(x)$ ainsi définis forment une suite harmonique.

Inversement, on voit sur-le-champ que les éléments d'une suite harmonique quelconque se présentent sous la forme (4), où $a_s$ dépend seulement de son indice $s$, de sorte que les $a_s$ forment une suite ordinaire.

Supposons que les éléments de la suite harmonique (1) se déterminent à l'aide des expressions (4), nous disons que la suite (3) est la base de la suite harmonique (1), propriété que nous désignons par le symbole

$$[f_n(x),\ a_n]; \tag{5}$$

de plus, nous désignons par l'autre symbole

$$[a_n] \tag{6}$$

la base de la suite harmonique (5), savoir la suite ordinaire (3).

On sait que M. Appell[1]) a étudié, le premier à un point de vue systématique, les suites harmoniques. Dans mon Mémoire susdit j'ai donné d'autres propriétés des suites harmoniques.

Nous nous bornerons à indiquer ici les deux théorèmes suivants, qui sont évidents du reste:

I. Pour un élément quelconque de la suite harmonique (1) nous aurons la série de Taylor

$$f_n(x+h) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{h^s}{s!} \cdot f_{n-s}(x). \tag{7}$$

[1]) Annales de l'École Normale (2) t. 9, p. 119—144; 1880.

II. Les deux suites harmoniques $[f_n(x), a_n]$ et $[g_n(x), b_n]$ sont identiques, pourvu que nous ayons pour tous les $n$

$$f_n(0) = g_n(0). \tag{8}$$

En effet, la formule (8) donnera $a_n = b_n$.

## § 2. Les fonctions de Bernoulli.

Nous définissons la suite des polynomes de BERNOULLI

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{1}$$

comme la suite harmonique, dont les éléments satisfont, pour $n \geqq 1$, à l'équation aux différences finies

$$\varphi_n(x) - \varphi_n(x-1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{2}$$

Demontrons tout d'abord que les équations (2) déterminent parfaitement la base $[\alpha_n]$ de la suite harmonique (1).

A cet effet, il est évident qu'un polynome entier quelconque qui satisfera à l'équation (2) est précisément du degré $n$ par rapport à $x$. Ordonnons ensuite, à l'aide de la formule binomiale, selon des puissances ascendantes de $x$ le polynome $\varphi_n(x-1)$, puis cherchons, au premier membre de (2), le coefficient de la puissance $x^{n-p-1}$, nous aurons:

$$\alpha_0 = 1\,; \quad \sum_{s=0}^{s=p} \frac{(-1)^s \alpha_{p-s}}{(s+1)!} = 0\,; \tag{3}$$

c'est-à-dire que la base $[\alpha_n]$ susdite est déterminée.

Nous aurons par exemple

$$\alpha_0 = 1\,, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}\,, \quad \alpha_2 = \frac{1}{12}\,, \quad \alpha_3 = 0. \tag{4}$$

Cela posé, nous aurons immédiatement le théorème suivant:

I. Désignons par $K$ une constante arbitraire, le polynome le plus général qui satisfait à léquation aux différences finies

$$f(x) - f(x-1) = \sum_{s=0}^{s=n-1} a_{n,s}\, x^{n-s-1}, \quad n \geqq 1 \tag{5}$$

se présente sous la forme

$$f(x) = K + \sum_{s=0}^{s=n-1} a_{n,s}(n-s-1)! \quad \varphi_{n-s}(x). \tag{6}$$

Ce théorème établi, il est très facile de démontrer cet autre, essentiel dans nos recherches suivantes:

II. Soit $[f_n(x), a_n]$ une suite harmonique quelconque, il existe une autre suite harmonique parfaitement déterminée $[F_n(x), A_n]$, telle que nous aurons pour $n \geqq 1$ constamment

$$F_n(x) - F_n(x-1) = f_{n-1}(x)\,; \tag{7}$$

car nous aurons pour tous les $n$:

$$F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \alpha_s \varphi_{n-s}(x). \tag{8}$$

En effet, la formule (6) donnera pour $n \geqq 0$:

$$F_{n+1}(x) = K + \sum_{s=0}^{s=n} \alpha_s \varphi_{n-s+1}(x),$$

de sorte que nous obtenons, en différentiant par rapport à $x$, précisément la formule (8).

Cela posé, il est très facile de discuter la base $[\alpha_n]$ des fonctions de BERNOULLI, définie par les équations (3).

A cet effet, nous étudions la suite harmonique dont les éléments sont les polynomes

$$f_n(x) = (x+1)\varphi_{n-1}(x) - (n-1)\varphi_n(x), \quad f_0(x) = 1; \tag{9}$$

nous trouvons, après un simple calcul direct:

$$f_n(x) - f_n(x-1) = \varphi_{n-1}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\alpha_s x^{n-s-1}}{(n-s-1)!},$$

de sorte que le théorème II donnera, en vertu de (4):

$$(x+1)\varphi_{n-1}(x) = n\varphi_n(x) + \sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s \varphi_{n-s}(x). \tag{10}$$

Cherchons ensuite, dans les deux membres de (10), le coefficient de la puissance $x^{n-p}$, nous aurons pour $p \geqq 1$:

$$\frac{n\alpha_p}{(n-p)!} + \sum_{s=1}^{s=p} \frac{\alpha_s \alpha_{p-s}}{(n-p)!} = \frac{\alpha_p}{(n-p-1)!} + \frac{\alpha_{p-1}}{(n-p)!},$$

d'où, en vertu des valeurs particulières (4):

$$(p+1)\alpha_p = -\sum_{s=2}^{s=p-2} \alpha_s \alpha_{p-s}, \quad p \geqq 4. \tag{11}$$

Cela posé, la valeur particulière $\alpha_3 = 0$ donnera, par la conclusion ordinaire de $m$ à $m+1$, l'expression générale:

$$\alpha_{2p+1} = 0, \quad p \geqq 1; \tag{12}$$

posons ensuite

$$\alpha_{2p} = \frac{(-1)^{p-1} B_p}{(2p)!}, \quad p \geqq 1, \tag{13}$$

nous aurons, en vertu de (11), la formule récursive:

$$(14)\qquad (2p+1)B_p = \sum_{s=1}^{s=p-1} \binom{2p}{2s} B_s B_{p-s}\,, \quad p \geqq 2\,,$$

ce qui montrera que les nombres rationnels $B_n$ sont constamment positifs.

Introduisons dans (3) les expressions (4), (12) et (13), nous aurons:

$$(15)\qquad \frac{p-1}{2} = \sum_{s=1}^{\leqq \frac{p}{2}} (-1)^{s-1} \binom{p+1}{2s} B_s\,, \quad p \geqq 2\,;$$

c'est-à-dire que notre définition des nombres de Bernoulli coïncide avec la définition classique de ces nombres.

La base $[\alpha_n]$ des fonctions de Bernoulli étant déterminée, nous aurons les expressions suivantes:

$$(16)\qquad \begin{cases} \varphi_0(x) = 1\,, \quad \varphi_1(x) = x + \dfrac{1}{2}\,, \\[2ex] \varphi_n(x) = \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \displaystyle\sum_{s=1}^{\leqq \frac{n}{2}} \dfrac{(-1)^{s-1} B_s x^{n-2s}}{(2s)!\,(n-2s)!}\,, \end{cases}$$

et l'équation aux différences finies (2) donnera par conséquent:

$$(17)\qquad \begin{cases} \varphi_0(x-1) = 1\,, \quad \varphi_1(x-1) = x - \dfrac{1}{2}\,, \\[2ex] \varphi_n(x-1) = \dfrac{x^n}{n!} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \displaystyle\sum_{s=1}^{\leqq \frac{n}{2}} \dfrac{(-1)^{s-1} B_s x^{n-2s}}{(2s)!\,(n-2s)!}\,. \end{cases}$$

Remarquons encore que la formule (10) se présente sous la forme

$$(18)\qquad \left(x+\frac{1}{2}\right)\varphi_{n-1}(x) = n\varphi_n(x) + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1} B_s}{(2s)!} \varphi_{n-2s}(x)\,, \quad n \geqq 2\,,$$

formule qui nous sera très utile dans nos recherches suivantes.

## § 3. Les fonctions d'Euler.

La suite des polynomes d'Euler

$$(1)\qquad \chi_0(x),\ \chi_1(x),\ \chi_2(x),\ \ldots,\ \chi_n(x),\ \ldots$$

est définie par les équations aux différences finies

$$(2)\qquad \chi_n(x) + \chi_n(x-1) = \frac{x^n}{n!}\,, \quad n \geqq 0.$$

En effet, on voit immédiatement que $\chi_n(x)$ est précisément du degré $n$ par rapport à $x$; posons

$$\chi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\beta_s x^{n-s}}{(n-s)!}, \tag{3}$$

ce qui est toujours possible; nous aurons, en vertu de (2):

$$\beta_0 = \frac{1}{2}; \quad 2\beta_p + \sum_{s=1}^{s=p} \frac{(-1)^s \beta_{p-s}}{s!} = 0, \tag{4}$$

ce qui nous détermine $\beta_p$ comme fonction de $p$ seulement; nous aurons par exemple

$$\beta_0 = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{4}, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = -\frac{1}{48}, \quad \beta_4 = 0. \tag{5}$$

Cela posé, nous aurons le théorème suivant:

I. Les fonctions $\chi_n(x)$ d'Euler forment une suite harmonique.

L'analogie entre les fonctions de Bernoulli et celles d'Euler est évidente. De plus, nous aurons les deux théorèmes suivants:

II. Il existe un seul polynome entier de $x$ qui satisfait à l'équation aux différences finies

$$g(x) + g(x-1) = \sum_{s=0}^{s=n} c_{n,s} x^{n-s}, \tag{6}$$

savoir le polynome

$$g(x) = \sum_{s=0}^{s=n} c_{n,s}(n-s)!\, \chi_{n-s}(x). \tag{7}$$

III. Soit $[g_n(x), c_n]$ une suite harmonique, les équations aux différences finies

$$G_n(x) + G_n(x-1) = g_n(x), \quad n \geq 0 \tag{8}$$

déterminent parfaitement une autre suite harmonique $[G_n(x), C_n]$; car nous aurons pour tous les $n$

$$G_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} c_s \chi_{n-s}(x). \tag{9}$$

Cela posé, il est très facile de discuter la base $[\beta_n]$ des fonctions d'Euler.

En effet, nous verrons, en vertu de (2), que les polynomes

$$g_n(x) = (x+1)\chi_n(x) - (n+1)\chi_{n+1}(x) \tag{10}$$

qui forment une suite harmonique satisfont aux équations aux différences finies

$$g_n(x) + g_n(x-1) = \chi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\beta_s x^{n-s}}{(n-s)!}, \tag{11}$$

ce qui donnera, en vertu de (9):

$$(x+1)\chi_n(x) = (n+1)\chi_{n+1}(x) + \sum_{s=0}^{s=n} \beta_s \chi_{n-s}(x), \tag{12}$$

d'où, pour $p \geqq 3$, la formule récursive

$$p\beta_p = -\sum_{s=1}^{s=p-2} \beta_s \beta_{p-s-1}. \tag{13}$$

Appliquons maintenant la valeur particulière $\beta_2 = 0$, la conclusion ordinaire de $m$ à $m+1$ donnera, en vertu de (13), l'expression générale

$$\beta_{2p} = 0\,, \quad p \geqq 1\,; \tag{14}$$

posons ensuite pour $p \geqq 1$

$$\beta_{2p-1} = \frac{(-1)^{p-1}\,T_p}{(2p-1)!\;2^{2p}}\,, \qquad T_1 = 1\,, \tag{15}$$

nous aurons, en vertu de (13), la formule récursive

$$T_{p+1} = \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{2p}{2s+1} T_{s+1}\,T_{p-s}\,, \qquad p \geqq 1\,, \tag{16}$$

ce qui montrera que les $T_n$ sont des positifs entiers, et que $T_n$ est, pour $n > 1$, toujours un nombre pair.

Introduisons dans (4) les expressions (14) et (15), nous aurons en posant $p = 2n+1$, respectivement $p = 2n$:

$$\left\{\begin{aligned} &2T_{n+1} + \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^s \binom{2n+1}{2s} 2^{2s}\,T_{n-s+1} = (-1)^n\,2^{2n-1}\,, \\ &\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{2s+1} 2^{2s}\,T_{n-s} = (-1)^{n-1}\,2^{2n-1}\,; \end{aligned}\right. \tag{17}$$

c'est-à-dire que notre définition des coefficients des tangentes coïncide avec la définition classique de ces nombres.

La base $[\beta_n]$ des fonctions d'Euler ainsi déterminée, nous aurons les expressions suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} &\chi_0(x) = \frac{1}{2}\,, \quad \chi_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\,, \\ &\chi_n(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^n}{n!} + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^{s-1}\,T_s\,x^{n-2s+1}}{(2s-1)!\,(n-2s+1)!\,2^{2s}}\,, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

et l'équation aux différences finies (2) donnera par conséquent:

$$\left\{\begin{aligned} &\chi_0(x-1) = \frac{1}{2}\,, \quad \chi_1(x-1) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\,, \\ &\chi_n(x-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^n}{n!} - \sum_{s=1}^{\leqq \frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^{s-1}\,T_s\,x^{n-2s+1}}{(2s-1)!\,(n-2s+1)!\,2^{2s}}\,. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Remarquons encore que la formule (12) se présente sous la forme

$$(20)\qquad \left(x+\frac{1}{2}\right)\chi_n(x) = (n+1)\,\chi_{n+1}(x) + \sum_{s=1}^{\leq\frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^{s-1}T_s}{(2s-1)!\,2^{2s}}\,\chi_{n-2s+1}(x)\,, \qquad n \geqq 1\,,$$

formule qui nous sera très utile dans nos recherches suivantes.

## § 4. Formules de Bernoulli et d'Euler.

Posons dans les équations aux différences finies

$$(1)\qquad \varphi_n(x) - \varphi_n(x-1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,, \qquad \chi_n(x) + \chi_n(x-1) = \frac{x^n}{n!}$$

successivement

$$x+1,\ x+2,\ x+3\ \ldots,\ x+p$$

au lieu de $x$, puis posons pour abréger

$$(2)\qquad s_n(x,\,p) = \sum_{s=1}^{s=p}(x+s)^n\,, \qquad \sigma_n(x,\,p) = \sum_{s=1}^{s=p}(-1)^{p-s}(x+s)^n\,,$$

nous aurons respectivement:

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi_n(x+p) - \varphi_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\,s_{n-1}(x,\,p)\,,\\ &\chi_n(x+p) - (-1)^p\chi_n(x) = \frac{1}{n!}\,\sigma_n(x,\,p)\,,\end{aligned}\right.$$

formules qui nous permettent d'exprimer sous forme explicite les deux sommes de puissances numériques

$$(4)\qquad s_n(p) = \sum_{s=1}^{s=p} s^n\,, \qquad \sigma_n(p) = \sum_{s=1}^{s=p}(-1)^{p-s}s^n.$$

Nous aurons en effet:

$$(5)\qquad s_n(0,\,p) = s_n(p)\,, \qquad s_n(-1,\,p) = s_n(p-1)\,,$$

$$(6)\qquad \sigma_n(0,\,p) = \sigma_n(p)\,, \qquad \sigma_n(-1,\,p) = \sigma_n(p-1)\,,$$

ce qui donnera, en vertu de (3), les expressions cherchées

$$(7)\qquad s_n(p) = n!\,\big(\varphi_{n+1}(p) - \varphi_{n+1}(0)\big)\,,$$

$$(8)\qquad \sigma_n(p) = n!\,\big(\chi_n(p) - (-1)^p\chi_n(0)\big).$$

Jacques Bernoulli[1]) a donné explicitement les dix premières formules de la forme (7), savoir les formules qui correspondent à $1 \leqq n \leqq 10$, et c'est précisément dans ces formules que les nombres de Bernoulli, savoir les

$$B_1\ \ B_2\ \ B_3\ \ B_4\ \ B_5$$

se sont présentés pour la première fois dans l'Analyse.

[1]) Ars conjectandi, p. 97; Bâle 1713.

BERNOULLI indique aussi la formule générale (5), mais sans démonstration, sans éclaircissements sur la nature des coëfficients du polynome $\varphi_n(x)$.

La formule (8) est due à EULER[1]. On voit du reste que cette dernière formule est plus compliquée que celle de BERNOULLI, parce que sa forme dépend de la parité du nombre $p$. Dans nos recherches suivantes sur les fonctions $\chi_n(x)$ ou sur les nombres $\sigma_n(p)$ nous retrouvons la même incommodité.

JACOBI[2] semble avoir introduit le premier une variable continue au lieu du positif entier $p$ qui figure au second membre de (7). En effet, il a considéré la fonction

$$\varphi_{2n}(x) + \frac{(-1)^n B_n}{(2n)!}. \tag{9}$$

OSTROGRADSKY[3], MALMSTÉN[4], DIENGER[5] ont de même considéré une variable continue dans notre formule numérique susdite; mais c'est RAABE[6] qui a donné la première monographie des fonctions de BERNOULLI.

On doit à JACOBI et à MALMSTÉN des remarques importantes relatives à la variation de $\varphi_n(x)$. OSTROGRADSKY a représenté les $\varphi_n(x)$ comme des polynomes entiers de la variable $x+1$, représentations qui sont des conséquences immédiates des formules (17) du paragraphe 2 et (19) du paragraphe 3 pour $\varphi_n(x-1)$, respectivement $\chi_n(x-1)$.

RAABE[7] a introduit dans le second membre de (8) une variable continue; plus tard HERMITE[8] a résolu, à un autre point de vue, le même problème, tandis que M. F. ROGEL[9] a donné une monographie des fonctions d'EULER.

Il est digne d'intérêt que les deux suites harmoniques, formées par les polynomes

$$\frac{s_n(x,\,p)}{n\,!}, \qquad \frac{\sigma_n(x,\,p)}{n\,!}$$

nous permettent de généraliser les formules de BERNOULLI et d'EULER.

A cet effet, remarquons tout d'abord que $s_n(x, p)$ est toujours du degré $n$ par rapport à $x$, tandis que $\sigma_n(x, p)$ est du degré $n$ respectivement $n-1$, selon que $p$ est impair ou pair.

Nous aurons par exemple:

$$\sigma_1(x,\,2p) = p\,, \qquad \sigma_1(x,\,2p+1) = x+p+1. \tag{10}$$

---

1) Institutiones calculi differentialis, p. 499; Saint-Pétersbourg 1755.

2) Journal de Crelle, t. 12, p. 265—267; 1834.

3) Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg, (6) t. 2, p. 322—323; 1841.

4) Journal de Crelle, t. 35, p. 60—67; 1847.

5) Ibid. t. 34, p. 75—100; 1847.

6) Die Jacob Bernoullische Function; Zurich 1848. Journal de Crelle, t. 42, p. 348—367; 1851. Mathematische Mittheilungen I—II; Zurich 1857—58.

7) Mathematische Mittheilungen II, p. 129—138; 1858.

8) Journal de Crelle, t. 116, p. 144; 1896.

9) Prager Berichte 1892; 52 pages.

Les définitions (2) donnent immédiatement les équations aux différences finies

$$s_n(x, p) - s_n(x-1, p) = (x+p)^n - x^n\,,$$
$$\sigma_n(x, p) + \sigma_n(x-1, p) = (x+p)^n - (-1)^p x^n\,,$$

de sorte que nous aurons de même:

$$s_n(x, p) + s_n(x-1, p) = 2s_n(x, p) - (x+p)^n + x^n\,,$$
$$\sigma_n(x, p) - \sigma_n(x-1, p) = 2\sigma_n(x, p) - (x+p)^n + (-1)^p x^n.$$

Appliquons ensuite la formule binomiale et la série de Taylor (7) du paragraphe 1; les théorèmes II du paragraphe 2 et III du paragraphe 3 donnent pour $s_n(x, p)$ ces deux développements:

$$\frac{s_n(x, p)}{n\,!} = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{p^{r+1}}{(r+1)\,!}\,\varphi_{n-r}(x)\,, \tag{11}$$

$$\frac{s_n(x, p)}{n\,!} = 2p\,\chi_n(x) + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{2s_r(p) - p^r}{r\,!}\,\chi_{n-r}(x). \tag{12}$$

Quant à $\sigma_n(x, p)$, nous aurons pour $p$ impair:

$$\frac{\sigma_n(x, p)}{n\,!} = 2\chi_n(x) + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{p^r}{r\,!}\,\chi_{n-r}(x)\,, \tag{13}$$

$$\frac{\sigma_n(x, p)}{n\,!} = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{2\sigma_{r+1}(p) - p^{r+1}}{(r+1)\,!}\,\varphi_{n-r}(x)\,, \tag{14}$$

tandis que l'hypothèse $p$ pair donnera:

$$\frac{\sigma_n(x, p)}{n\,!} = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{p^{r+1}}{(r+1)\,!}\,\chi_{n-r-1}(x)\,, \tag{15}$$

$$\frac{\sigma_n(x, p)}{n\,!} = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{2\sigma_{r+2}(p) - p^{r+2}}{(r+2)\,!}\,\varphi_{n-r-1}(x). \tag{16}$$

Posons $x = 0$ dans les formules (11), (13) et (15): nous retrouvons les formules de Bernoulli et d'Euler, tandis que les formules (12), (14) et (16) nous donnent l'inversion de (7) et (8), comme nous le verrons dans le paragraphe 13.

Dans ce qui suit nous avons à étudier aussi ces deux autres sommes de puissances numériques:

$$t_n(p) = 2^n s_n(-\tfrac{1}{2}, p) = \sum_{s=1}^{s=p} (2s-1)^n\,, \tag{17}$$

$$\tau_n(p) = 2^n \sigma_n(-\tfrac{1}{2}, p) = \sum_{s=1}^{s=p} (-1)^{s-1}(2p-2s+1)^n. \tag{18}$$

Conformément aux formules (3) nous posons:

$$s_n(x, 0) = \sigma_n(x, 0) = t_n(0) = \tau_n(0) = 0. \tag{19}$$

## § 5. Théorème de Jacobi.

Revenons maintenant aux équations aux différences finies qui figurent dans la définition de $\varphi_n(x)$, respectivement $\chi_n(x)$, puis changeons le signe de $x$, nous aurons

$$(-1)^n \varphi_n(-x-1) = (-1)^n \varphi_n(-x) + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$(-1)^n \chi_n(-x-1) = (-1)^{n-1} \chi_n(-x) + \frac{x^n}{n!},$$

tandis que les définitions de $\varphi_n(x)$ et $\chi_n(x)$ donnent respectivement:

$$(-1)^n \varphi_n(-x) = \varphi_n(x) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$(-1)^{n-1} \chi_n(-x) = \chi_n(x) - \frac{x^n}{n!};$$

cest-à-dire que nous aurons le théorème suivant:

I. Les fonctions $\varphi_n(x)$ et $\chi_n(x)$ satisfont, pour tous les $n$, aux équations fonctionnelles

$$(1) \qquad (-1)^n \varphi_n(-x-1) = \varphi_n(x), \quad (-1)^n \chi_n(-x-1) = \chi_n(x).$$

Soit maintenant $f(x)$ un polynome entier quelconque du degré $n$ par rapport à $x$, l'identité evidente

$$x = -\frac{1}{2} + \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

donnera la série de Taylor

$$(2) \qquad f(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^s}{s!} f^{(s)}\left(-\frac{1}{2}\right);$$

appliquons ensuite les identités

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^{2n} = \left((x^2 + x) + \frac{1}{4}\right)^n,$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left((x^2 + x) + \frac{1}{4}\right)^n,$$

nous aurons, en vertu de (2), une représentation de la forme

$$(3) \qquad f(x) = f_1(x^2 + x) + \left(x + \frac{1}{2}\right) f_2(x^2 + x),$$

valable pour un polynome entier quelconque de $x$.

Cela posé, développons à l'aide de (3) les polynomes $\varphi_n(x)$ et $\chi_n(x)$; les formules (1) montrent qu'un des polynomes correspondants $f_1(x)$ ou $f_2(x)$ se réduira à zéro.

Jacobi[1]) a démontré, pour une valeur paire de $n$, la première des formules (1); de plus, il indique un développement de la forme[2])

[1]) Journal de Crelle, t. 12, p. 267; 1834.

[2]) loc. cit. p. 271. Voir aussi Nouvelles Annales, t. 7, p. 448; 1848, t. 10, p. 198—199; 1851.

$$(4) \qquad s_{2n-1}(p) = \sum_{q=0}^{q=n-1} a_{n,q}(p^2+p)^{n-q};$$

plus tard Prouhet [1]) a démontré la formule analogue

$$(5) \qquad s_{2n}(p) = \left(p+\frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{q=0}^{q=n} b_{n,q}(p^2+p)^{n-q}.$$

Cependant, il n'est pas possible de donner sous une simple forme les coëfficients $a_{n,q}$ et $b_{n,q}$ qui figurent aux seconds membres des formules (4) et (5), de sorte qu'il sera inutile de chercher pour $\varphi_n(x)$, et pour $\chi_n(x)$ aussi du reste, les développements obtenus à l'aide de la formule (3).

Remarquons en passant que Malmstén [2]), Dienger [3]), Raabe [4]) ont démontré la première des formules (1), tandis que Raabe [5]) a démontré aussi la seconde.

Quant aux équations fonctionnelles (1), nous aurons immédiatement:

$$(6) \qquad \varphi_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \chi_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0;$$

le dernier de ces résultats nous permet d'introduire les nombres d'Euler. Nous prenons comme définition

$$(7) \qquad E_n = (-1)^n (2n)!\, 2^{2n} \chi_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right), \qquad n \geq 1,$$

ce qui donnera, en vertu de la formule (20) du paragraphe 3:

$$(8) \qquad E_1 = 1; \quad E_n = T_n + \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n+1}{2s-1} T_s E_{n-s},$$

de sorte que les nombres d'Euler sont des positifs entiers.

Remarquons que les $T_n$, à l'exception de $T_1 = 1$, sont des nombres pairs, nous verrons que les $E_n$ sont tous des nombres impairs.

Dans la formule (18) du paragraphe 3, posons $x = -\frac{1}{2}$, nous aurons, en vertu de (6) et (7), pourvu que $n$ soit remplacé par $2n$:

$$(9) \qquad E_n = (-1)^n + \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{2s+1} T_{n-s};$$

c'est-à-dire que notre définition des nombres d'Euler coincide avec la définition classique de ces nombres.

---

[1]) Nouvelles Annales, t. 10, p. 199—200; 1851.

[2]) Journal de Crelle, t. 35, p. 64; 1847.

[3]) Ibid. t. 34, p. 99; 1847.

[4]) Die Jacob Bernoullische Function, p. 18; Zurich 1848. Journal de Crelle, t. 42, p. 354; 1851. *Mathematische Mittheilungen* t. I, p. 48; Zurich 1857.

[5]) *Mathematische Mittheilungen* t. II, p. 136; Zurich 1858.

Appliquons maintenant à $\chi_n(x)$ la formule (2), nous aurons:

$$(10)\qquad \chi_n(x) = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^n}{n!\,2} + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s E_s}{(2s)!\,2^{2s+1}} \cdot \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n-2s}}{(n-2s)!};$$

cette formule, due à RAABE[1]), est essentielle dans nos recherches sur les nombres d'EULER.

Démontrons maintenant que les équations fonctionnelles (1) nous conduiront à des résultats intéressants concernant les deux fonctions $\varphi_n(px)$ et $\chi_n(px)$, dans lesquelles $p$ désigne un entier quelconque, plus grand que l'unité.

En premier lieu, les équations aux différences finies qui figurent dans la définition des $\varphi_n(x)$ et des $\chi_n(x)$ donnent:

$$\varphi_n(-px-p) = \varphi_n(-px-1) + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sum_{s=1}^{s=p-1} (px+s)^{n-1},$$

$$\chi_n(-px-p) = (-1)^{p-1}\chi_n(-px-1) + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \sum_{s=1}^{s=p-1} (-1)^{s-1}(px+p-s)^n;$$

multiplions ensuite par $(-1)^n$, puis divisons par $p^{n-1}$ respectivement par $p^n$, nous aurons, en vertu des équations fonctionnelles (1):

$$(11)\qquad \frac{(-1)^n}{p^{n-1}}\varphi_n(-px-p) = \frac{\varphi_n(px)}{p^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sum_{s=1}^{s=p-1} \left(x+\frac{s}{p}\right)^{n-1},$$

$$(12)\qquad \frac{(-1)^n}{p^n}\chi_n(-px-p) = \frac{(-1)^{p-1}\chi_n(px)}{p^n} + \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=1}^{s=p-1} (-1)^{s-1}\left(x+\frac{p-s}{p}\right)^n.$$

En second lieu, soient $\alpha$ et $\beta$ deux variables complexes quelconques, les équations aux différences finies susdites donnent:

$$(13)\qquad \varphi_n(p\alpha-\beta-1) - \varphi_n(p\alpha-\beta-p-1) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} (\beta+s+1-p\alpha)^{n-1},$$

$$(14)\qquad \chi_n(p\alpha-\beta-1) - (-1)^p\chi_n(p\alpha-\beta-p-1) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s(\beta+s+1-p\alpha)^n.$$

Étudions d'abord la formule (13), ordonnons selon de puissances descendantes de $\alpha$ le second membre; le théorème II du paragraphe 2 donnera le développement suivant:

$$(15)\qquad \varphi_n(p\alpha-\beta-1) = p^n\varphi_n(\alpha) + \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(-1)^r p^{n-r-1}}{r!} s_r(\beta, p)\,\varphi_{n-r}(\alpha);$$

---

[1]) *Mathematische Mittheilungen* t. II, p. 133; Zurich 1858.

car le second membre de (13) représente, divisé par $p^{n-1}$, une suite harmonique par rapport à la variable $\alpha$.

La formule (14) donnera par le même procédé, pour $p$ pair:

$$\chi_n(p\alpha-\beta-1)=\sum_{r=0}^{r=n}\frac{(-1)^r p^{n-r-1}}{(r+1)!}\sigma_{r+1}(\beta,p)\varphi_{n-r}(x), \tag{16}$$

tandis que nous aurons pour $p$ impair:

$$\chi_n(p\alpha-\beta-1)=p^n\chi_n(\alpha)+\sum_{r=1}^{r=n}\frac{(-1)^r p^{n-r}}{r!}\sigma_r(\beta,p)\chi_{n-r}(\alpha). \tag{17}$$

Cela posé, nous avons à déduire des trois développements que nous venons d'établir quelques résultats plus particuliers, mais très importants.

Posons tout d'abord $\alpha=0$ et $\beta=x$, puis appliquons les équations fonctionnelles (1), il en résulte les formules

$$\varphi_n(x)=(-p)^n\varphi_n(0)+\sum_{r=1}^{r=n}\frac{(-1)^{n-r}p^{n-r-1}}{r!}\varphi_{n-r}(0)\,s_r(x,p), \tag{18}$$

$$\chi_n(x)=\sum_{r=0}^{r=n}\frac{(-1)^{n-r}p^{n-r-1}}{(r+1)!}\varphi_{n-r}(0)\,\sigma_r(x,p), \tag{19}$$

$$\chi_n(x)=(-p)^n\chi_n(0)+\sum_{r=1}^{r=n}\frac{(-1)^{n-r}p^{n-r}}{r!}\chi_{n-r}(0)\,\sigma_r(x,p), \tag{20}$$

qui représentent les inversions des formules (11), (13) et (15) du paragraphe 4; dans (19) et (20) il faut supposer, par conséquent, $p$ pair respectivement impair.

Posons ensuite $\alpha=x$, $\beta=-1$, nous aurons ces trois développements:

$$\varphi_n(px)=p^n\varphi_n(x)+\sum_{r=1}^{r=n}\frac{(-1)^r p^{n-r-1}}{r!}s_r(p-1)\varphi_{n-r}(x), \tag{21}$$

$$\chi_n(px)=\sum_{r=0}^{r=n}\frac{(-1)^r p^{n-r-1}}{(r+1)!}\sigma_{r+1}(p-1)\varphi_{n-r}(x), \tag{22}$$

$$\chi_n(px)=p^n\chi_n(x)+\sum_{r=1}^{r=n}\frac{(-1)^r p^{n-r}}{r!}\sigma_r(p-1)\chi_{n-r}(x). \tag{23}$$

Posons au contraire $\beta=0$, nous aurons des développements analogues pour $\varphi_n(px-1)$ et $\chi_n(px-1)$, formules qui peuvent être déduites des trois précédentes si nous remplaçons $s_r(p-1)$ et $\sigma_r(p-1)$ par les $s_r(p)$ et $\sigma_r(p)$ correspondantes.

## § 6. Formules de Raabe.

Comme une autre conséquence immédiate de nos développements précédents nous avons à démontrer les trois formules suivantes:

$$p^{n-1} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} \varphi_n\left(\frac{x-s}{p}\right) = \varphi_n(x)\,, \tag{1}$$

$$(2p+1)^n \cdot \sum_{s=0}^{s=2p} (-1)^s \chi_n\left(\frac{x-s}{2p+1}\right) = \chi_n(x)\,, \tag{2}$$

$$(2p)^{n-1} \cdot \sum_{s=0}^{s=2p-1} (-1)^s \varphi_n\left(\frac{x-s}{2p}\right) = \chi_{n-1}(x)\,, \tag{3}$$

où $p$ désigne un positif entier quelconque.

A cet effet, nous désignons pour abréger par

$$F_n(x)\,, \quad G_n(x)\,, \quad H_n(x)$$

les expressions qui figurent aux premiers membres des trois formules en question. Remarquons que ces polynomes forment des suites harmoniques et que nous aurons de plus:

$$F_n(x) - F_n(x-1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,,$$

$$G_n(x) + G_n(x-1) = \frac{x^n}{n!}\,,$$

$$H_n(x) + H_n(x-1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,;$$

les formules en question sont des conséquences immédiates de nos définitions des polynomes $\varphi_n(x)$ et $\chi_n(x)$.

Les formules (1) et (2) appartiennent à Raabe [1]), tandis que la troisième est peut-être nouvelle.

Posons dans (1) $p = 2$, dans (3) $p = 1$, nous aurons la formule importante

$$\chi_{n-1}(x) = 2^n \varphi_n\left(\frac{x}{2}\right) - \varphi_n(x)\,, \tag{4}$$

d'où, en remplaçant $n$ par $2n$ puis posant $x = 0$, la relation suivante, due à Euler [2]), entre les $B_n$ et les $T_n$:

$$T_n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{2n}\,. \tag{5}$$

Remarquons que les définitions des $\varphi_n(x)$ et $\chi_n(x)$ donnent immédiatement ces valeurs numériques:

---

[1]) Die Jacob Bernoullische Function, pp. 23, 28; Zurich 1848. Journal de Crelle, t. 42, p. 356—357; 1851. Mathematische Mittheilungen, t. II, p. 134; Zurich 1858.

[2]) Opuscula analytica, t. II, p. 273; Saint-Pétersbourg 1785.

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_{2n}(0) = \varphi_{2n}(-1) = \dfrac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!} \\ \varphi_{2n+1}(0) = \varphi_{2n+1}(-1) = 0 \end{array}\right\} \quad n \geqq 1,$$

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \chi_{2n}(0) = \chi_{2n}(-1) = 0 \\ \chi_{2n+1}(0) = -\chi_{2n+1}(-1) = \dfrac{(-1)^n T_{n+1}}{(2n+1)!\, 2^{2n+2}} \end{array}\right\} \quad n \geqq 1.$$

De plus, nous aurons:

$$(8)\qquad \varphi_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n (2^{2n}-2) B_n}{(2n)!\, 2^{2n}}, \quad \varphi_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$(9)\qquad \chi_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n E_n}{(2n)!\, 2^{2n+1}}, \quad \chi_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0;$$

la première des formules (8) peut être obtenue si nous posons dans (1) $p = 2$ et $x = 0$; les trois autres formules sont des conséquences immédiates de (6) et (7) du paragraphe 5.

Posons dans (4) $x = 0$, puis remplaçons $n$ par $2n$ respectivement par $2n+1$, nous aurons:

$$(10)\qquad \varphi_{2n}\left(-\frac{1}{4}\right) = \varphi_{2n}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{(-1)^n (2^{2n}-2) B_n}{(2n)!\, 2^{4n}},$$

$$(11)\qquad \varphi_{2n+1}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\varphi_{2n+1}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{(-1)^n E_n}{(2n)!\, 2^{4n+2}}.$$

Posons dans (1) $p = 3$, $x = 0$ et dans (2) $p = 1$, $x = 0$, nous aurons:

$$(12)\qquad \varphi_{2n}\left(-\frac{1}{3}\right) = \varphi_{2n}\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{(-1)^n (3^{2n}-3) B_n}{(2n)!\, 3^{2n} \cdot 2},$$

$$(13)\qquad \chi_{2n-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\chi_{2n-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{(-1)^{n-1} (3^{2n}-3) T_n}{(2n-1)!\, 6^{2n} \cdot 2}.$$

Enfin, posons dans (1) $p = 6$, $x = 0$, puis appliquons (8) et (12), nous aurons:

$$(14)\qquad \varphi_{2n}\left(-\frac{1}{6}\right) = \varphi_{2n}\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{(-1)^{n-1} (3^{2n}-3)(2^{2n}-2) B_n}{(2n)!\, 6^{2n} \cdot 2}.$$

Ces résultats numériques, essentiels dans les recherches très vastes et interminables de M. Glaisher [1]), ne jouent qu'un rôle très modeste dans nos recherches suivantes. Nous préférons appliquer directement les formules fondamentales (1), (2) et (3) elles-mêmes.

---

[1]) Voir par exemple: Quarterly Journal of mathematics, t. 29, p. 1—168; 1897.

# CHAPITRE II.

## Les nombres de Bernoulli et d'Euler.

### § 7. **Méthodes générales.**

On voit fort bien comment on pourrait appliquer notre théorie précédente à l'évaluation des formules récursives pour les $B_n$, $T_n$ et $E_n$.

A cet effet, nous prenons pour point de départ l'équation aux différences finies

$$f(x) - f(x-1) = \sum_{s=0}^{s=n-1} a_{n,s}\, x^{n-s-1}, \tag{1}$$

de sorte que nous aurons, en vertu du théorème I du paragraphe 2:

$$f(x) = K + \sum_{s=1}^{s=n} a_{n,\,n-s}(n-s-1)!\, \varphi_s(x). \tag{2}$$

Appliquons ensuite la première des équations fonctionnelles (1) du paragraphe 5, nous aurons de même:

$$f(-x-1) = K + \sum_{s=n}^{s=n} (-1)^s a_{n,\,n-s}(n-s-1)!\, \varphi_s(x), \tag{3}$$

d'où, en additionnant puis soustrayant les formules (2) et (3):

$$\frac{f(x)+f(-x-1)}{2} = K + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} a_{n,\,n-2s}(2s-1)!\, \varphi_{2s}(x), \tag{4}$$

$$\frac{f(x)-f(-x-1)}{2} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} a_{n,\,n-2s-1}(2s)!\, \varphi_{2s+1}(x). \tag{5}$$

Quant aux coefficients $a_{n,s}$ qui figurent au second membre de (1), nous aurons immédiatement:

$$\left\{\begin{aligned} a_{n,\,n-1} &= f(0) - f(-1), \\ (n-s-1)!\, a_{n,s} &= f^{(n-s-1)}(0) - f^{(n-s-1)}(-1). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Posons dans (4) $x=0$, dans (5) $x = -\frac{1}{4}$, nous aurons respectivement:

$$\frac{f(0)+f(-1)}{2} - K = \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1} a_{n,\,n-2s}}{2s} \cdot B_s, \tag{7}$$

$$a_{n,\,n-1} - f\left(-\frac{1}{4}\right) + f\left(-\frac{3}{4}\right) = \sum_{s=1}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^{s-1} a_{n,\,n-2s-1}}{2^{4s+1}} E_s; \tag{8}$$

posons ensuite, dans (4)

$$x = -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{6},$$

nous aurons d'autres formules récursives pour les $B_n$.

Appliquons maintenant à la formule (2) les formules générales (1) et (2) du paragraphe 6: nous aurons, en désignant par $p$ un positif entier quelconque:

$$p^{n-1} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} f\left(\frac{x-s}{p}\right) = p^n K + \sum_{s=1}^{s=n} a_{n,\,n-s}(s-1)!\,p^{n-s}\varphi_s(x), \tag{9}$$

$$(2p)^{n-1} \cdot \sum_{s=0}^{s=2p-1} (-1)^s f\left(\frac{x-s}{2p}\right) = \sum_{s=1}^{s=n} a_{n,\,n-s}(s-1)!\,(2p)^{n-s}\chi_{s-1}(x). \tag{10}$$

Posons par exemple $p=2$, respectivement $p=1$, l'hypothèse $x=0$ donnera:

$$\sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1} a_{n,\,n-2s}}{(2s)!\,2^{2s}} B_s = \frac{f(0) - 2f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(-1)}{4} - K, \tag{11}$$

$$\sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1} a_{n,\,n-2s}}{2^{4s-1}} T_s = \frac{f(0) - 2f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(-1)}{2}. \tag{12}$$

On voit que les formules (8) et (12) ne contiennent pas la constante $K$.

Considérons maintenant l'autre équation aux différences finies

$$f(x) + f(x-1) = \sum_{s=0}^{s=n} b_{n,\,s}\, x^{n-s}, \tag{13}$$

nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} b_{n,\,n} &= f(0) + f(-1) \\ (n-s)!\,b_{n,\,s} &= f^{(n-s)}(0) + f^{(n-s)}(-1) \end{aligned}\right. \tag{14}$$

et pour le polynome $f(x)$ l'expression suivante:

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=n} b_{n,\,n-s}\, s!\,\chi_s(x). \tag{15}$$

Il est évident que nous aurons, dans ce cas, des formules analogues à (4) et (5). Posons $x=0$, $x=-\frac{1}{2}$, nous aurons de même:

$$\sum_{s=1}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^{s-1} b_{n,\,n-2s-1}}{2^{2s}} T_s = \frac{f(0) - f(-1)}{2}, \tag{16}$$

$$\sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1} b_{n,\,n-2s}}{2^{2s+1}} E_s = \frac{f(0) - 2f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(-1)}{2}, \tag{17}$$

de sorte que les formules (12) et (17) donnent, pourvu que la fonction $f(x)$ qui figure dans les équations aux différences finies (1) et (13) soit la même, la relation intéressante

$$\sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1} b_{n,\, n-2s}}{2^{2s+1}} E_s = \sum_{s=1}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^{s-1} a_{n,\, n-s}}{2^{4s-1}} T_s. \tag{18}$$

Appliquons maintenant la formule (2) du paragraphe 6, nous aurons, en vertu de (15):

$$(2p+1)^n \cdot \sum_{s=0}^{s=2p} (-1)^s f\left(\frac{x-s}{2p+1}\right) = \sum_{s=0}^{s=n} b_{n,\, n+s}\, s!\, (2p+1)^{n-s} \chi_s(x). \tag{19}$$

Supposons que les polynomes qui figurent aux seconds membres des équations aux différences finies (1) et (13) ne forment pas des suites harmoniques, nous trouvons des formules nouvelles en différentiant plusieurs fois par rapport à $x$ les deux formules (2) et (15).

Les difficultés qui se présentent dans l'application des méthodes susdites sont évidentes.

En effet, il faut connaître:

1° La valeur de $f(x)$ pour des valeurs particulières de l'argument $x$

2° Les coefficients $a_{n,\,s}$ respectivement $b_{n,\,s}$ qui figurent au second membre de la formule (1) respectivement de la formule (13)

3° La constante $K$[1]) qui figure dans le développement (2).

Cette dernière difficulté est ecartée dans le cas où $f(x)$ est l'élément général d'une suite harmonique.

En effet, dans ce cas il existe deux bases $[a_n]$ et $[b_n]$, telles que nous aurons:

$$a_{n,\,p} = \frac{a_p}{(n-p-1)!}, \quad b_{n,\,p} = \frac{b_p}{(n-p)!}, \tag{20}$$

et le théorème II du paragraphe 2 donnera de même:

$$K = a_n. \tag{21}$$

Dans le cas où $f(x)$ est l'élément général d'une suite harmonique, nous ne trouvons pas de formules nouvelles en différentiant par rapport à $x$ les formules (2) respectivement (15).

---

[1]) Posons $f(x) = A_{n,\,0}\, x^n + A_{n,\,1}\, x^{n-1} + \ldots + A_{n,\,n-1}\, x + A_{n,\,n}$,

nous aurons pour $K$ l'expression suivante

$$K = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s A_{n,\,s}}{n-s+1}.$$

## § 8. **Sur une équation fonctionnelle.**

Dans un cas, essentiel pour les recherches qui nous occupent ici, nous connaissons dès à présent les coefficients $\alpha_{n,s}$ et $\beta_{n,s}$ qui figurent aux seconds membres des équations aux différences finies

$$f(x) - f(x-1) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \alpha_{n,s}\, x^{n-s-1}\,, \tag{1}$$

$$f(x) + f(x-1) = \sum_{s=0}^{s=n} \beta_{n,s}\, x^{n-s}\,, \tag{2}$$

pourvu que le polynome du degré $n$ par rapport à $x$

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=n} a_{n,s}\, x^{n-s} \tag{3}$$

soit donné.

C'est dans le cas où $f(x)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(-1)^n f(-x-1) = f(x). \tag{4}$$

En effet, changeons dans (4) le signe de $x$, nous aurons, en vertu de (3):

$$f(x-1) = (-1)^n f(-x) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s a_{n,s}\, x^{n-s}\,,$$

ce qui donnera immédiatement:

$$f(x) - f(x-1) = 2 \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} a_{n,2s+1}\, x^{n-2s-1}\,, \tag{5}$$

$$f(x) + f(x-1) = 2 \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} a_{n,2s}\, x^{n-2s}\,, \tag{6}$$

de sorte que ces deux conditions sont certainement nécessaires pour que le polynome $f(x)$, définie par la formule (3), satisfasse à l'équation fonctionnelle (4).

Inversement, prenons pour point de départ les deux équations aux différences finies (5) et (6), les théorèmes I du paragraphe 2 et III du paragraphe 3 donnent respectivement ces deux développements:

$$\frac{1}{2} f(x) = K_n + \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} a_{n,2s+1}\,(n-2s-1)!\,\varphi_{n-2s}(x)\,, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2} f(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} a_{n,2s}(n-2s)!\,\chi_{n-2s}(x). \tag{8}$$

Cela posé, appliquons le théorème I du paragraphe 5, nous aurons en vertu de (8):

I. L'équation aux différences finies (6) représente la condition suffisante et nécessaire pour que le polynome entier $f(x)$, défini par la formule (3), satisfasse à l'équation fonctionnelle (4).

Quant à la condition nécessaire (5), elle n'est suffisante que dans le cas où le degré $n$ de $f(x)$ est un nombre pair. Soit, au contraire, $n$ un nombre impair, il faut, en vertu de (7), ajouter la condition ultérieure

$$K_n = 0; \tag{9}$$

car l'équation (4) donnera, pour $n$ impair:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0;$$

et nous aurons de même:

$$\varphi_{2m+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Ordonnons maintenant selon des puissances descendantes de $x$ le second membre de (7), nous aurons:

$$\left\{\begin{aligned} a_{n,0} &= \frac{2}{n} a_{n,1}, \\ (-1)^{p-1}\left(\frac{a_{n,2p}}{2} - \frac{a_{n,2p+1}}{n-2p}\right) &= \frac{1}{n-2p} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \binom{n-2s-1}{2p-2s} B_{p-s}\, a_{n,2s+1}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

tandis que la formule (8) donnera de même:

$$(-1)^p a_{n,2p+1} = \sum_{s=0}^{s=p} \frac{(-1)^s}{2^{2p-2s+1}} \binom{n-2s}{2p-2s+1} T_{p-s+1}\, a_{n,2s}. \tag{11}$$

On voit que les deux systèmes d'équations linéaires (10) et (11) entre les coefficients $a_{n,p}$ sont inverses l'un à l'autre.

Dans le cas où $n$ est un nombre pair, on voit que le dernier coefficient $a_{n,n}$ de $f(x)$ ne figure dans aucune des formules (10) et (11); c'est-à-dire que nous pouvons donner à ce coefficient une valeur arbitraire.

L'application des formules (5) et (6), ou, ce qui est la même chose, des formules (7) et (8) à la théorie des nombres de Bernoulli et d'Euler est évidente et se présente immédiatement en vertu des développements du paragraphe 7.

On voit du reste que les formules (7) et (8) sont, à ce point de vue, moins générales que les formules correspondantes (2) et (15) du paragraphe 7; car les deux premières formules ne nous donnent que des formules récursives qui correspondent à une valeur paire ou impaire de $n$, tandis que les deux dernières donneront de telles formules, quelle que soit la parité de $n$.

Soient maintenant

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \tag{12}$$

les racines de l'équation algébrique

$$f(x) = 0,$$

où $f(x)$ est le polynome qui figure dans les formules (3) et (4), et soit $a_s$ une des racines (12) qui n'est pas égale à $-\frac{1}{2}$; il existe une autre racine $a_r$, telle que

$$a_s = -1 - a_r. \tag{13}$$

Cela posé, désignons par $m$ un positif entier quelconque, il est évident que les polynomes entiers

$$F_m(x) = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(x-a_s)^m}{m!} \tag{14}$$

qui forment une suite harmonique satisfont aux équations fonctionnelles

$$(-1)^m F_m(-x-1) = F_m(x).$$

Posons ensuite pour abréger

$$s_0 = n, \quad s_r = a_1^r + a_2^r + \ldots + a_n^r, \tag{15}$$

$$t_r = \left(\frac{1}{2} + a_1\right)^r + \left(\frac{1}{2} + a_2\right)^r + \ldots + \left(\frac{1}{2} + a_n\right)^r, \tag{16}$$

nous aurons évidemment:

$$t_{2r+1} = 0, \tag{17}$$

tandis que la formule (14) donnera:

$$F_m(x) = \sum_{q=0}^{q=m} \frac{(-1)^q s_q}{q!} \cdot \frac{x^{m-q}}{(m-q)!};$$

c'est-à-dire que nous aurons les deux développements

$$\frac{1}{2} F_m(x) = -\sum_{q=0}^{\leq \frac{m}{2}} \frac{s_{2q+1}}{(2q+1)!} \varphi_{m-2q}(x), \tag{18}$$

$$\frac{1}{2} F_m(x) = \sum_{q=0}^{\leq \frac{m}{2}} \frac{s_{2q}}{(2q)!} \chi_{m-2q}(x). \tag{19}$$

Remplaçons maintenant, dans ces deux formules, $m$ par $2m$ respectivement par $2m+1$, puis posons $x = 0$, nous aurons respectivement:

$$(-1)^m \left(\left(m + \frac{1}{2}\right) s_{2m} + s_{2m+1}\right) = \sum_{q=0}^{q=m-1} (-1)^q \binom{2m+1}{2q+1} s_{2q+1} B_{m-q}, \tag{20}$$

$$(-1)^{m-1} s_{2m+1} = \sum_{q=0}^{q=m} \frac{(-1)^q}{2^{2m-2q+1}} \binom{2m+1}{2q} s_{2q} T_{m-q+1}, \tag{21}$$

formules qui sont analogues à (10) respectivement (11).

Remplaçons ensuite, dans (18) et (19), $m$ par $2m$, puis posons $x = -\frac{1}{2}$, nous aurons de même:

(22) $$(-1)^{m-1}\left(s_{2m+1} + \left(m + \frac{1}{2}\right) t_{2m}\right) = \sum_{q=0}^{q=m-1} (-1)^q \binom{2m+1}{2q+1} \frac{2^{2m-2q}-2}{2^{2m-2q}} s_{2q} B_{m-q},$$

(23) $$(-1)^m (t_{2m} - s_{2m}) = \sum_{q=0}^{q=m-1} \frac{(-1)^q}{2^{2m-2q}} \binom{2m}{2q} s_{2q} E_{m-q}.$$

Il est très facile du reste de généraliser beaucoup les formules de ce genre.

## § 9. Les suites parfaites et les formules récursives.

Nous désignons comme parfaite une suite harmonique $[F_n(x), A_n]$, dont les éléments satisfont pour tous les $n$ à l'équation fonctionnelle

(1) $$(-1)^n F_n(-x-1) = F_n(x).$$

La suite harmonique définie à l'aide de la formule (14) du paragraphe 8 est par conséquent parfaite.

De plus nous aurons la proposition suivante:

I. *Les suites harmoniques formées des fonctions de Bernoulli où des fonctions d'Euler sont parfaites toutes deux.*

Appliquons maintenant les résultats que nous venons de développer dans le paragraphe 8, nous aurons les deux équations aux différences finies

(2) $$F_n(x) - F_n(x-1) = 2 \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{A_{2s+1}\, x^{n-2s-1}}{(n-2s-1)!},$$

(3) $$F_n(x) + F_n(x-1) = 2 \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{A_{2s}\, x^{n-2s}}{(n-2s)!}$$

et les deux développements

(4) $$\frac{1}{2} F_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} A_{2s+1}\, \varphi_{n-2s}(x),$$

(5) $$\frac{1}{2} F_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} A_{2s}\, \chi_{n-2s}(x),$$

tandis que les éléments de la base $[A_n]$ satisfont aux conditions suivantes:

$$
(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A_1 = \frac{1}{2} A_0 , \\ & \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s A_{2s+1} B_{n-s}}{(2n-2s)!} = (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{2} A_{2n} - A_{2n+1} \right), \end{aligned} \right.
$$

ou, ce qui est la même chose:

$$
(7) \qquad \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s A_{2s} T_{n-s+1}}{(2n-2s+1)!\, 2^{2n-2s+1}} = (-1)^n A_{2n+1}.
$$

On voit que la constante $K_n$ qui figure dans la formule (7) du paragraphe 8 satisfait, dans le cas qui nous étudions ici, à la condition $K_{2n+1} = 0$; c'est-à-dire que nous aurons le théorème suivant:

II. La suite parfaite $[F_n(x), A_n]$ est déterminée, pourvu que nous connaissions une seule des deux suites infinies

$$
(8) \qquad A_0, A_2, A_4, \ldots, A_{2n}, \ldots
$$

$$
(9) \qquad A_1, A_3, A_5, \ldots, A_{2n+1}, \ldots
$$

Pour les fonctions $\varphi_n(x)$ de Bernoulli la suite correspondante (9) ne contient que le seul élément

$$
A_1 = \frac{1}{2},
$$

tandis que la suite (8) qui correspond aux fonctions $\chi_n(x)$ d'Euler se réduira au seul élément

$$
A_0 = \frac{1}{2}.
$$

On voit qu'une suite parfaite quelconque conduira à des formules récursives de la forme (6) et (7).

Or, il est très facile de donner l'inversion des théorèmes indiqués par ces deux formules récursives.

En premier lieu, soient

$$
\begin{aligned} & a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \\ & b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots; \quad b_0 = 0 \end{aligned}
$$

deux suites infinies, telles que nous aurons, pour $n \geq 1$, les formules récursives

$$
(10) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s a_s B_{n-s}}{(2n-2s)!} = (-1)^{n-1} b_n ,
$$

puis posons pour $n \geq 0$

$$
(11) \qquad A_{2n} = 2(a_n + b_n), \quad A_{2n+1} = a_n ,
$$

nous aurons le théorème suivant:

III. La suite harmonique $[F_n(x), A_n]$, dont la base $[A_n]$ est déterminée par les formules (11), est parfaite, de sorte que nous aurons ces deux développements, valables pour tous les $n$:

$$\frac{1}{2} F_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} a_s \varphi_{n-2s}(x) , \tag{12}$$

$$\frac{1}{4} F_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (a_s + b_s) \chi_{n-2s}(x). \tag{13}$$

C'est-à-dire que nous pouvons remplacer la formule numérique (10) par les deux formules (12) et (13) qui contiennent la variable complexe $x$.

Remplaçons, par exemple, dans (13) $n$ par $2n+1$, puis posons $x=0$, nous aurons, comme conséquence immédiate de (10), la formule récursive pour les $T_n$

$$\sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s (a_s + b_s) T_{n-s+1}}{(2n-2s+1)!\, 2^{2n-2s}} = (-1)^n a_n . \tag{14}$$

En second lieu, soient

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$
$$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

deux suites infinies, telles que nous aurons, pour $n \geqq 0$, les formules récursives

$$\sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s a_s T_{n-s+1}}{(2n-2s+1)!\, 2^{2n-2s+1}} = (-1)^n b_n , \tag{15}$$

puis posons

$$A_{2n} = a_n , \quad A_{2n+1} = b_n , \tag{16}$$

nous aurons de même:

IV. La suite harmonique $[F_n(x), A_n]$, dont la base $[A_n]$ est déterminée par les formules (16), est parfaite, de sorte que nous aurons ces deux développements, valables pour tous les $n$:

$$\frac{1}{2} F_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} b_s \varphi_{n-2s}(x) , \tag{17}$$

$$\frac{1}{2} F_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} a_s \chi_{n-2s}(x). \tag{18}$$

Remplaçons dans (17) $n$ par $2n$, puis posons $x=0$, nous aurons, comme conséquence immédiate de (15) la formule récursive pour les $B_n$

$$(19) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s b_s B_{n-s}}{(2n-2s)!} = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}a_n - b_n\right).$$

Dans ce qui suit nous désignons comme régulières les formules récursives de la forme (10) respectivement (15) pour les $B_n$ et les $T_n$, tandis que les autres formules récursives seront désignées comme étant irrégulières.

Remarquons que la plupart des formules récursives linéaires connues pour les $B_n$ et les $T_n$ sont régulières, il est évident que les suites parfaites jouent un rôle fondamental dans la théorie des nombres susdits.

Cependant, il faut remarquer que la plupart des suites parfaites que j'ai trouvées par ces considérations ne présentent qu'un intérêt médiocre pour l'Algèbre.

Le polynome étudié dans le paragraphe 14 semble être une exception à la règle générale.

Il est très facile d'indiquer d'autres suites parfaites. Soit par exemple $p \geqq 2$ un nombre entier, je dis, que les polynomes

$$(20) \qquad f_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=1}^{s=p-1} \left(x + \frac{s}{p}\right)^n,$$

$$(21) \qquad g_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=1}^{s=p-1} (-1)^{s-1} \left(x + \frac{p-s}{p}\right)^n.$$

forment des suites parfaites.

En effet, nous aurons immédiatement:

$$(22) \qquad (-1)^n f_n(-x-1) = f_n(x), \quad (-1)^n g_n(-x-1) = (-1)^p g_n(x),$$

et nous verrons que $f_n(x)$ est toujours du degré $n$, $g_n(x)$ du degré $n$ respectivement $n-1$, selon que $p$ est pair ou impair.

Appliquons les définitions (20) et (21), les formules (11) et (12) du paragraphe 5 se présentent sous la forme suivante:

$$\frac{(-1)^n}{p^{n-1}} \varphi_n(-px-p) = \frac{1}{p^{n-1}} \varphi_n(px) + f_{n-1}(x),$$

$$\frac{(-1)^n}{p^n} \chi_n(-px-p) = \frac{(-1)^{p-1}}{p^n} \chi_n(x) + g_n(x),$$

ce qui donnera le théorème suivant:

VI. Soit $p > 1$ un nombre entier, les polynomes

$$(23) \qquad F_n(x) = \frac{2}{p^{n-1}} \varphi_n(px) + f_{n-1}(x),$$

$$(24) \qquad G_n(x) = \frac{2}{p^n} \chi_n(px) - (-1)^p g_n(x)$$

forment des suites parfaites.

On voit que $F_n(x)$ est toujours du degré $n$, tandis que $G_n(x)$ est du degré $n-1$ respectivement $n$, selon que $p$ est pair ou impair.

# CHAPITRE III.

## Formules complètes linéaires.

### § 10. Formules régulières pour les $B_n$.

Il est très interessant, ce me semble, que la plupart des formules récursives classiques connues pour les nombres de BERNOULLI sont une conséquence immédiate de l'identité

$$\varphi_m(x) = \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m-1}}{2\cdot(m-1)!} + \sum_{s=1}^{\leq\frac{m}{2}} \frac{(-1)^s B_s x^{m-2s}}{(2s)!\,(m-2s)!}, \tag{1}$$

formule qui nous donnera un grand nombre d'autres formules récursives aussi élégantes que les précédentes.

En effet, désignons par $p$ un positif entier quelconque, puis posons pour abréger

$$A_m(x, p) = \frac{m+1}{2}\left(2s_m(x, p) - (x+p)^m\right) - (x+p)^{m+1}, \tag{2}$$

nous aurons, en posant dans (1) $x+p$ au lieu de $x$, la formule générale

$$\sum_{s=1}^{\leq\frac{m}{2}} (-1)^{s-1}\binom{m}{2s}(x+p)^{m-2s} B_s = m!\,\varphi_m(x) + A_{m-1}(x, p), \tag{3}$$

formule qui est essentielle dans la théorie des nombres de BERNOULLI.

Première application. Supposons $x=0$, puis posons pour abréger

$$A_m = A_m(0, p) = \frac{m+1}{2}\left(2s_m(p) - p^m\right) - p^{m+1}, \tag{4}$$

je dis, que nous aurons les quatre formules récursives générales:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n+1}{2s+1} p^{2s+1} B_{n-s} = (-1)^{n-1} A_{2n}, \tag{5}$$

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n+2}{2s+2} p^{2s+2} B_{n-s} = (-1)^{n-1} A_{2n+1}, \tag{6}$$

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n+1}{2s+2} p^{2s+2} B_{n-s} = (-1)^{n-1}(A_{2n+1} - pA_{2n}), \tag{7}$$

$$(2n+1)B_n + \sum_{s=1}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{2s+1} p^{2s} B_{n-s} = (-1)^{n-1}\left(\frac{A_{2n}}{p} - A_{2n-1}\right). \tag{8}$$

En effet, posons dans (3) $x=0$, $m=2n+1$ respectivement $m=2n+2$, nous aurons les formules (5) et (6); soustrayons (5) de (6), il en résulte la formule (7).

Quant à la formule (8), nous posons dans (6) $n-1$ au lieu de $n$, puis soustrayons le résultat ainsi obtenu de la formule (5) divisée par $p$.

Ces formules générales nous donnent les cas particuliers suivants:

1° $p=1$; nous aurons:

$$A_m = \frac{m-1}{2}, \quad A_m - A_{m-1} = \frac{1}{2},$$

ce qui donnera les formules **1**, **2**, **3** et **4** de la Table. Les trois premières de ces formules sont dues respectivement à Moivre[1]), à Jacobi[2]) et à Stern[3]).

La formule de Moivre est la première formule récursive connue pour les nombres de Bernoulli. On voit que notre définition des $B_n$, savoir la formule (15) du paragraphe 2, donnera et la formule de Moivre et celle de Jacobi.

2° $p=2$; nous aurons dans ce cas:

$$A_m = (m-3)\,2^{m-1} + m + 1, \quad A_m - 2\,A_{m-1} = 2^{m-1} - (m-1),$$

ce qui nous conduira aux formules **5**, **6**, **7** et **8** de la Table; la formule **5** est due à G.-F. Meyer[4]).

On voit, en vertu de la formule (11), du paragraphe 4, que les suites parfaites qui correspondent aux formules régulières (5) et (6) ont respectivement les éléments généraux

$$\frac{s_n(x,p) + (-1)^n s_n(-x-1,p)}{n!}, \tag{9}$$

$$\frac{s_{n+1}(x,p) + (-1)^n s_{n+1}(-x-1,p)}{(n+1)!}. \tag{10}$$

Deuxième application. Supposons, dans notre formule (3), $x = -\frac{1}{2}$, puis posons pour abréger:

$$A_m = m\left(2\,t_{m-1}(p) - (2p-1)^{m-1}\right) - (2p-1)^m. \tag{11}$$

où $t_m(p)$ est la somme de puissances numériques, définie dans la formule (17) du paragraphe 4, nous aurons, par la méthode expliquée dans la première application, les formules générales

$$(2^{2n+1}-2)\,B_n + \sum_{s=1}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{2s} 2^{2n-2s} (2p-1)^{2s} B_{n-s} = (-1)^{n-1} A_{2n}, \tag{12}$$

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n+1}{2s+1} 2^{2n-2s} (2p-1)^{2s} B_{n-s} = \frac{(-1)^{n-1} A_{2n+1}}{2p-1}, \tag{13}$$

[1]) Miscellanea analytica, complementum, p. 6; Londres 1730.

[2]) Journal de Crelle, t. 12, p. 265; 1834.

[3]) Ibid. t. 84, p. 267; 1878.

[4]) Die Bernoullischen Zahlen (Thèse de doctorat); Gœttingue 1859.

$$(14)\quad \left((2n-1)2^{2n}+2\right)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}2^{2n-2s}(2p-1)^{2s}B_{n-s}=(-1)^{n-1}\left(\frac{A_{2n+1}}{2p-1}-A_{2n}\right),$$

$$(15)\quad (2^{2n+1}-2)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s}2^{2n-2s}(2p-1)^{2s}B_{n-s}=(-1)^{n-1}\left(A_{2n}-(2p-1)A_{2n-1}\right).$$

1° $p=1$; la formule (11) donnera

$$A_m = m-1\,,\quad A_m - A_{m-1} = 1\,,$$

d'où les formules **9**, **10**, **11** et **12** de la Table. La formule **9** est due à STERN[1]), tandis que la formule **10** appartient à EULER[2]).

2° $p=2$, ce qui donnera:

$$A_m = (m-3)\,3^{m-1}+2m\,,\quad A_m - 3A_{m+1} = 3^{m-1}-(4m-6)\,,$$

et nous trouvons par conséquent les formules **13**, **14**, **15** et **16** de la Table.

Les suites parfaites qui correspondent aux deux formules régulières (12) et (13) ont respectivement les éléments généraux

$$(16)\quad \frac{1}{2^{n-2}}\varphi_n(2x)+\frac{s_{n-1}\left(x-\frac{1}{2},\,p\right)+(-1)^n s_{n-1}\left(-x-\frac{1}{2},\,p-1\right)}{n!}\,,$$

$$(17)\quad \frac{s_n\left(x-\frac{1}{2},\,p\right)+(-1)^n s_n\left(-x-\frac{1}{2},\,p-1\right)}{n!}\,.$$

T r o i s i è m e  a p p l i c a t i o n. Posons, dans la formule générale (3),

$$x = -\frac{a}{4}\,;\quad a=1 \text{ ou } a=3\,,$$

nous aurons les formules générales

$$(18)\quad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}(4p-a)^{2s+1}4^{2n-2s}B_{n-s} = (-1)^{\frac{a+1}{2}}E_n-(-1)^n 4^{2n+1}A_{2n}\left(-\frac{a}{4},\,p\right),$$

$$(19)\quad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}(4p-a)^{2s}4^{2n-2s}B_{n-s} = -(2^{2n}-2)B_n-(-1)^n 4^{2n}A_{2n-1}\left(-\frac{a}{4},\,p\right).$$

1° $p=1$; nous aurons les formules **17**, **18**, **19** et **20** de la Table; la formule **17** est due à WORPITZKY[3]).

2° $p=2$; nous trouvons les formules **21**, **22**, **23** et **24** de la Table.

Les suites parfaites qui correspondent aux deux formules régulières (18) et (19) ont respectivement les éléments généraux

---

1) Journal de Crelle, t. 26, p. 90; 1843.

2) Opuscula analytica, t. II, p. 264—265; Saint-Pétersbourg 1785.

3) Journal de Crelle, t. 94, p. 224; 1883.

$$(20)\qquad \frac{(-1)^{\frac{a-1}{2}}}{2^n}\chi_n\left(2x-\frac{1}{2}\right)+\frac{s_n\left(x-\frac{a}{4},p\right)+(-1)^n s_n\left(-x-\frac{a}{4},p-1\right)}{n!},$$

$$(21)\qquad \frac{1}{4^{n-1}}\varphi_n(4x)-\frac{1}{2^{n-1}}\varphi_n(2x)+\frac{s_{n-1}\left(x-\frac{a}{4},p\right)+(-1)^n s_{n-1}\left(-x-\frac{a}{4},p-1\right)}{(n-1)!}.$$

Quatrième application. Soit, dans la formule (3),

$$x=-\frac{a}{3},\quad a=1 \text{ ou } a=2,$$

nous aurons la formule récursive générale

$$(22)\quad \frac{3}{2}(3^{2n}-1)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}(3p-a)^{2s}3^{2n-2s}B_{n-s}=(-1)^{n-1}3^{2n}A_{2n-1}\left(-\frac{a}{3},p\right),$$

dont la suite parfaite correspondante a l'élément général

$$(23)\qquad \frac{\varphi_n(3x)}{3^{n-1}}+\frac{s_{n-1}\left(x-\frac{a}{3},p\right)+(-1)^n s_{n-1}\left(-x-\frac{a}{3},p-1\right)}{(n-1)!}.$$

1° $p=1$; nous aurons les formules **25** et **26** de la Table.

2° $p=2$, ce qui donnera les formules **27** et **28** de la Table.

Cinquième application. Les hypothèses

$$x=-\frac{a}{6},\quad a=1 \text{ ou } a=5$$

nous conduiront, en vertu de (3), à la formule récursive générale

$$(24)\quad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-)1^s\binom{2n}{2s}(6p-a)^{2s}6^{2n-2s}B_{n-s}=\frac{(3^{2n}-3)(2^{2n}-2)}{2}B_n+(-1)^{n-1}6^{2n}A_{2n-1}\left(-\frac{a}{6},p\right),$$

à laquelle correspond la suite parfaite formée des polynomes

$$(25)\quad \frac{\varphi_n(6x)}{6^{n-1}}-\frac{\varphi_n(3x)}{3^{n-1}}-\frac{\varphi_n(2x)}{2^{n-1}}+\frac{s_{n-1}\left(x-\frac{a}{6},p\right)+(-1)^n s_{n-1}\left(-x-\frac{a}{6},p-1\right)}{(n-1)!}.$$

1° $p=1$; nous aurons les formules **29** et **30** de la Table.

2° $p=2$, ce qui nous conduira aux formules **31** et **32** de la Table.

On voit que les formules récursives que nous venons de développer sont contenues dans les trois formules générales de la forme

$$(26)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}4^{2n-2s}p^{2s}B_{n-s}=a_{n,p}B_n+b_{n,p}E_n+c_{n,p},$$

$$(27)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}4^{2n-2s}p^{2s}B_{n-s}=a'_{n,p}B_n+b'_{n,p}E_n+c'_{n,p},$$

$$(28)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{2s} 6^{2n-2s} p^{2s} B_{n-s} = \alpha_{n,p} B_n + \beta_{n,p}.$$

Dans ces formules générales $p$ désigne un positif entier quelconque.

## § 11. Formules régulières pour les $T_n$.

Dans nos recherches sur les coefficients des tangentes nous prenons pour point de départ la fonction d'Euler

$$(1)\qquad \chi_m(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^m}{m!} + \sum_{s=1}^{\leq \frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{s-1} T_s x^{m-2s+1}}{(2s-1)!\,(m-2s+1)!\,2^{2s}};$$

remplaçons $x$ par $x+p$, où $p$ désigne un positif entier quelconque, puis posons pour abréger

$$(2)\qquad A_m(x, p) = 2^{m+1} \sigma_m(x, p) - (2p+2x)^m,$$

nous aurons la formule générale:

$$(3)\qquad \sum_{s=1}^{\leq \frac{m+1}{2}} (-1)^{s-1} \binom{m}{2s-1} (2p+2x)^{m-2s+1} T_s = A_m(x, p) + (-1)^p m!\, 2^{m+1} \chi_m(x).$$

Première application. Supposons, dans (3), $x = -\frac{1}{2}$, puis posons en vertu de (2):

$$(4)\qquad A_m = 2\tau_m(p) - (2p-1)^m,$$

où $\tau_m(p)$ est la somme de puissances numériques définie dans la formule (18) du paragraphe 4; nous aurons, par le procédé ordinaire, ces quatre formules récursives:

$$(5)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{2s+1} (2p-1)^{2s+1} T_{n-s} = (-1)^{p-1} E_n + (-1)^{n-1} A_{2n},$$

$$(6)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n-1}{2s} (2p-1)^{2s} T_{n-s} = (-1)^{n-1} A_{2n-1},$$

$$(7)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n-1}{2s+1} (2p-1)^{2s+1} T_{n-s} = (-1)^{p-1} E_n - (-1)^n \big(A_{2n} - (2p-1) A_{2n-1}\big),$$

$$(8)\qquad T_{n+1} - \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{2s+2} (2p-1)^{2s+2} T_{n-s} = (-1)^{p-1}(2p-1)E_n - (-1)^n \big((2p-1)A_{2n} - A_{2n+1}\big).$$

1° $p = 1$; nous aurons:

$$A_m = 1, \quad A_m - A_{m-1} = 0,$$

ce qui nous conduira aux formules **33**, **34**, **35**, **36** de la Table.

2° $p=2$, ce qui donnera:

$$A_m = 3^m - 2\,,\quad A_m - 3A_{m-1} = 4\,;$$

nous trouvons les formules **41**, **42**, **43** et **44** de la Table.

3° $p=3$; les formules (7) et (8) nous conduiront aux formules **49**, **50** de la Table.

Les suites parfaites qui correspondent aux formules régulières (5) et (6) ont respectivement les éléments généraux

$$(9)\qquad (-1)^p\, 2\chi_{n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sigma_{n+1}\left(x-\frac{1}{2},p\right)+(-1)^n\sigma_{n+1}\left(-x-\frac{1}{2},p-1\right)}{(n+1)\,!},$$

$$(10)\qquad \frac{\sigma_n\left(x-\frac{1}{2},p\right)+(-1)^n\sigma_n\left(-x-\frac{1}{2},p-1\right)}{n\,!}.$$

Deuxième application. Supposons, dans la formule générale (3), $x=0$, puis posons pour abréger

$$(11)\qquad A_m = 2^{m+1}\sigma_m(p) - (2p)^m\,,$$

nous aurons, pourvu que $p$ soit un nombre impair:

$$(12)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}(2p)^{2s+1}\,T_{n-s} = (-1)^{n-1}A_{2n}\,,$$

$$(13)\qquad 2T_{n+1}+\sum_{s=1}^{s=n}(-1)^s\binom{2n+1}{2s}(2p)^{2s}\,T_{n-s+1} = (-1)^n A_{2n+1}\,,$$

$$(14)\qquad 2n\,T_{n+1}+\sum_{s=1}^{s=n}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}(2p)^{2s}\,T_{n-s+1} = (-1)^n\left(\frac{A_{2n+2}}{2p}-A_{2n+1}\right),$$

$$(15)\qquad 2T_{n+1}+\sum_{s=1}^{s=n}(-1)^s\binom{2n}{2s}(2p)^{2s}\,T_{n-s+1} = (-1)^n(A_{2n+1}-2p\,A_{2n}).$$

1° $p=1$, nous trouvons:

$$A_m = 2^m\,,\quad A_m - 2A_{m-1} = 0\,,$$

ce qui donnera les formules **37**, **38**, **39** et **40** de la Table.

2° $p=3$; les formules (14) et (15) donnent les formules **51** et **52** de la Table.

Supposons que $p$ soit un nombre pair, nous aurons:

$$(16)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}(2p)^{2s+1}\,T_{n-s} = (-1)^{n-1}A_{2n}\,,$$

$$(17)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+2}(2p)^{2s+2}\,T_{n-s} = (-1)^{n-1}A_{2n+1}\,,$$

$$(18)\qquad 2n\,T_n + \sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s+1}(2p)^{2s}\,T_{n-s} = (-1)^{n-1}\left(A_{2n} - \frac{A_{2n-1}}{2p}\right),$$

$$(19)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+2}(2p)^{2s+2}\,T_{n-s} = (-1)^{n-1}(A_{2n+1} - 2p\,A_{2n}).$$

3° $p=2$; nous aurons:

$$A_m = 4^m - 2^{m+1}\,,\quad A_m - 4A_{m-1} = 2^{m+1}\,,$$

ce qui donnera les formules **45**, **46**, **47** et **48** de la Table; la formule **45** est due à G.-F. Meyer [1]).

Les suites parfaites qui corrrespondent aux formules regulières (12) et (16), (13) et (17) ont respectivement les éléments généraux

$$(20)\qquad \frac{\sigma_n(x,p) + (-1)^n\sigma_n(-x-1,p)}{n!}\,,$$

$$(21)\qquad \frac{\sigma_{n+1}(x,p) + (-1)^n\sigma_{n+1}(-x-1,p)}{(n+1)!}\,.$$

Troisième application. Supposons dans la formule (3)

$$x = -\frac{a}{3}\,,\quad a=1 \text{ ou } a=2\,,$$

puis posons:

$$(22)\qquad A_m = 6^m\,\sigma_{m-1}\left(-\frac{a}{3},\,p\right) - 3\,(6p-2a)^{m-1}\,,$$

nous aurons pour $m=2n-1$, la formule récursive

$$(24)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s}3^{2n-2s}(6p-2a)^{2s}\,T_{n-s} = (-1)^{n-1}A_{2n} - \frac{(-1)^{a+p}(3^{2n}-3)}{2}\,T_n\,,$$

ce qui donnera pour $p=1$, $p=2$ les formules **53**, **54**, **55** et **56** de la Table.

La suite parfaite qui correspond à la formule régulière (24) a l'élément général

$$(25)\qquad (-1)^{a+p}\left(\frac{\chi_n(3x)}{3^n} - \chi_n(x)\right) + \frac{\sigma_n\left(x-\frac{a}{3},\,p\right) + (-1)^n\sigma_n\left(-x-\frac{a}{3},\,p-1\right)}{n!}\,.$$

## § 12. Formules pour les $E_n$.

Nos recherches sur les nombres d'Euler sont fondées sur la formule (10) du paragraphe 5, savoir:

$$(1)\qquad 2\chi_m(x) = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^m}{m!} + \sum_{s=1}^{\leq\frac{m}{2}}\frac{(-1)^s E_s}{(2s)!\,2^{2s}}\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{m-2s}}{(m-2s)!}\,;$$

dans ce qui suit nous désignons toujours par $p$ un positif entier.

---

[1]) Die Bernoullischen Zahlen. Gœttingue 1859.

P r e m i è r e   a p p l i c a t i o n. Supposons, dans (1), $x = p$, puis posons pour abréger:

(2) $$A_m = (2p+1)^m - 2^{m+1}\sigma_m(p)\,,$$

le procédé ordinaire nous conduira à ces quatre formules récursives:

(3) $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}(2p+1)^{2s}E_{n-s} = (-1)^{n-1}A_{2n}\,,$$

(4) $$\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^{s-1}\binom{2n-1}{2s-1}(2p+1)^{2s-1}E_{n-s} = (-1)^p T_n + (-1)^n A_{2n-1}\,,$$

(5) $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s}(2p+1)^{2s}E_{n-s} = (-1)^p(2p+1)T_n - (-1)^n\big(A_{2n} - (2p+1)A_{2n-1}\big),$$

(6) $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}(2p+1)^{2s+1}E_{n-s} = (-1)^p T_{n+1} + (-1)^{n-1}\big(A_{2n+1} - (2p+1)A_{2n}\big),$$

1° $p = 0$, ce qui donnera $\sigma_m(0) = 0$, d'où:

$$A_m = 1\,,\quad A_m - A_{m-1} = 0\,;$$

c'est-à-dire que nous aurons les formules classiques **57**, **58**, **59** et **60** de la Table.

Les formules **57** et **59** sont dues respectivement à EULER[1]) et à SCHERK[2]).

2° $p = 1$, nous aurons dans ce cas:

$$A_m = 3^m - 2^{m+1}\,,\quad A_m - 3A_{m-1} = 2^m\,,$$

ce qui donnera les formules **65**, **66**, **67** et **68** de la Table.

3° $p = 2$; les formules (5) et (6) donnent respectivement les formules **71** et **72** de la Table.

D e u x i è m e   a p p l i c a t i o n. Introduisons, dans la formule (1), $x = p - \frac{1}{2}$, puis posons pour abréger:

(7) $$A_m = (2p)^m - 2\tau_m(p)\,,$$

nous aurons pour $p$ i m p a i r:

(8) $$2E_n + \sum_{s=1}^{s=n-1}{}'(-1)^s\binom{2n}{2s}(2p)^{2s}E_{n-s} = (-1)^{n-1}A_{2n}\,,$$

(9) $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}(2p)^{2s+1}E_{n-s} = (-1)^{n-1}A_{2n+1}\,,$$

(10) $$(2n-1)E_n + \sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)\binom{2n}{2s+1}(2p)^{2s}E_{n-s} = (-1)^{n-1}\left(\frac{A_{2n+1}}{2p} - A_{2n}\right),$$

---

1) Institutiones calculi differentialis, p. 545; Saint-Pétersbourg 1755. Opuscula analytica, t. II, p. 269—70; Saint-Pétersbourg 1785.

2) Mathematische Abhandlungen; Berlin 1825.

$$(11)\qquad 2E_n + \sum_{s=1}^{s=2n-1} (-1)^s \binom{2n-1}{2s} (2p)^{2s} E_{n-s} = (-1)^{n-1} (A_{2n} - 2p\, A_{2n-1}).$$

1° $p = 1$; nous aurons:

$$A_m = 2^m - 2\,, \quad A_m - 2A_{m-1} = 2\,,$$

ce qui donnera les formules **61**, **62**, **63** et **64** de la Table.

Soit ensuite $p$ un nombre pair, nous aurons:

$$(12)\qquad \sum_{s=1}^{s=n-1} (-1)^{s-1} \binom{2n}{2s} (2p)^{2s} E_{n-s} = (-1)^n A_{2n}\,,$$

$$(13)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n+1}{2s+1} (2p)^{2s+1} E_{n-s} = (-1)^{n-1} A_{2n+1}\,,$$

$$(14)\qquad (2n+1)E_n + \sum_{s=1}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{2s+1} (2p)^{2s} E_{n-s} = (-1)^{n-1} \left(\frac{A_{2n+1}}{2p} - A_{2n}\right),$$

$$(15)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n+1}{2s+2} (2p)^{2s+2} E_{n-s} = (-1)^n (A_{2n+2} - 2p\, A_{2n+1}).$$

2° $p = 2$; les formules (14) et (15) donnent respectivement les formules **69** et **70** de la Table.

Troisième application. Introduisons dans la formule (1):

$$x = p - \frac{a}{3}, \qquad a = 1 \text{ ou } a = 2\,,$$

puis posons pour abréger:

$$(16)\qquad A_m = 2 \cdot 6^{m-1} \sigma_{m-1}\left(-\frac{a}{3}, p\right) - (6p + 3 - 2a)^{m-1}\,,$$

nous aurons pour $m = 2n - 1$:

$$(17)\qquad \sum_{s=1}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n-1}{2s-1} 3^{2n-2s} (6p+3-2a)^{2s+1} E_{n-s} = (-1)^{n-1} A_{2n} - \frac{(-1)^{p+a}(3^{2n}-3)}{6} T_n.$$

Posons particulièrement $p = 0$, $a = 1$; $p = 1$, $a = 2$; $p = 1$, $a = 1$, nous aurons respectivement les formules **73**, **74** et **75** de la Table.

## § 13. Formules contenant les $s_n(p)$ et les $\sigma_n(p)$.[1]

Les formules de Bernoulli et d'Euler montrent clairement que les $B_n$ et les $T_n$ sont intimément liés avec les deux sommes de puissances numériques $s_n(p)$ et $\sigma_n(p)$.

[1] Dans un Mémoire qui paraîtra dans les *Annali di matematica* j'ai donné des généralisations très étendues et très curieuses des formules du § 13.

De plus, il est très facile d'évaluer, pour les $B_n$ et les $T_n$, une suite de formules récursives dont les coefficients contiennent les deux sommes susdites. Nous nous bornerons à développer les formules de ce genre qui sont essentielles dans les recherches qui nous occupent ici.

Remarquons tout d'abord que les développements pour les $s_n(x, p)$ et les $\sigma_n(x, p)$ que nous avons donnés dans le paragraphe 4, nous donnent des formules du genre susdit.

En effet, posons, dans la formule (12) du paragraphe 4, $x = 0$, $x = -1$, puis soustrayons les deux résultats ainsi obtenus, nous aurons la formule inverse de celle de Bernoulli, savoir:

$$(1) \qquad p^n = \sum_{r=0}^{\leqq \frac{n}{2}-1} (-1)^r \binom{n}{2r+1} \left(2\, s_{n-2r-1}(p) - p^{n-2r-1}\right) \frac{T_{r+1}}{2^{r+1}} + n!\, 4p\chi_n(0).$$

Traitons de la même manière les formules (14) et (16) du paragraphe 4, nous aurons:

$$(2) \qquad \frac{n+1}{2} p^n = 2\sigma_{n+1}(p) - p^{n+1} + \sum_{r=1}^{\leqq \frac{n-1}{2}} (-1)^{r-1} \binom{n+1}{2r} B_r \left(2\sigma_{n-2r+1}(p) - p^{n-2r-1}\right),$$

ce qui est l'inversion de la formule d'Euler.

Posons maintenant, dans la formule de Bernoulli,

$$m\, s_{m-1}(r) - r^m - \frac{m}{2} r^{m-1} = \sum_{s=1}^{\leqq \frac{m-1}{2}} (-1)^{s-1} \binom{m}{2s} B_s\, r^{m-2s},$$

successivement

$$r = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, p-1,$$

puis additionnons les $p-1$ équations ainsi obtenues, nous avons à étudier la somme

$$A = s_{m-1}(1) + s_{m-1}(2) + \ldots + s_{m-1}(p-1).$$

A cet effet, ordonnons le second membre selon les puissances

$$1^{m-1},\, 2^{m-1},\, 3^{m-1},\, \ldots,\, (p-1)^{m-1},$$

nous aurons:

$$A = (p-1)\cdot 1^{m-1} + (p-2)\cdot 2^{m-1} + \ldots + \left(p-(p-1)\right)\cdot (p-)1^{m-1},$$

ce qui donnera immédiatement:

$$A = p\, s_{m-1}(p-1) - s_m(p-1).$$

Cela posé, nous aurons finalement:

$$(3) \qquad \sum_{r=1}^{\leqq \frac{m-1}{2}} (-1)^{r-1} \binom{m}{2r} s_{m-2r}(p-1)\, B_r = m\left(p - \frac{1}{2}\right) s_{m-1}(p-1) - (m+1)\, s_m(p-1).$$

D'autres formules récursives de ce genre sont des conséquences immédiates des développements de $\varphi_n(px)$ et $\chi_n(px)$ donnés dans le paragraphe 5, savoir les formules (21), (22) et (23).

Le premier de ces développements:

$$\varphi_m(px) = p^m \varphi_m(x) + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{(-1)^r p^{m-r-1}}{r!} s_r(p-1)\varphi_{m-r}(x)$$

donnera pour $x = 0$ et $m = 2n$ respectivement $m = 2n+1$ ces deux formules récursives:

$$(4) \quad (p^{2n+1}-p)B_n + \sum_{r=1}^{r=n-1}(-1)^r\binom{2n}{2r}p^{2n-2r}s_{2r}(p-1)B_{n-r} = (-1)^n\big(s_{2n}(p-1) - np\, s_{2n-1}(p-1)\big),$$

$$(5) \quad \sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^r\binom{2n+1}{2r+1}p^{2n-2r}s_{2r+1}(p-1)B_{n-r} = (-1)^n\left(s_{2n+1}(p-1) - \left(n+\frac{1}{2}\right)p\, s_{2n}(p-1)\right),$$

formules qui peuvent être traitées d'après la méthode appliquée dans les paragraphes précédents.

Les deux formules (4) et (5) sont dues à M. A. Radicke[1]); posons dans les formules en question $p = 2$, nous retrouvons les formules **9** et **10** de la Table.

Remarquons encore qu'il est permis de remplacer, dans (4) et (5), les $s_m(p-1)$ par les $s_m(p)$ correspondantes.

Posons, dans (3), $m = 2n$, puis soustrayons de (4) le résultat ainsi obtenu, nous aurons:

$$(6) \quad \left\{\begin{aligned} & p(p^{2n}-1)B_n + \sum_{r=1}^{r=n-1}(-1)^r\binom{2n}{2r}s_{2r}(p-1)(p^{2n-2r}-1)B_{n-r} = \\ & \qquad = (-1)^n\big(n(p-1)s_{2n-1}(p-1) - 2n\, s_{2n}(p-1)\big), \end{aligned}\right.$$

formule qui est essentielle dans la théorie des nombres de Bernoulli.

Quant à la formule (22) du paragraphe 9, savoir:

$$\chi_m(px) = \sum_{r=0}^{r=m} \frac{(-1)^r p^{m-r-1}}{(r+1)!}\sigma_{r+1}(p-1)\varphi_{m-r}(x),$$

où $p$ désigne un nombre pair, nous aurons en posant $x = 0$ et $m = 2n$ respectivement $m = 2n+1$, les formules récursives:

$$(7) \quad \sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^r\binom{2n+1}{2r+1}p^{2n-2r}\sigma_{2r+1}(p-1)B_{n-r} = (-1)^n\left(\sigma_{2n+1}(p-1) - \left(n+\frac{1}{2}\right)p\,\sigma_{2n}(p-1)\right),$$

[1]) Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, p. 7; Halle a. S. 1880.

$$(8)\quad (2^{2n}-1)\,p\,B_n + \sum_{r=1}^{r=n-1} (-1)^r \binom{2n}{2r} p^{2n-2r}\sigma_{2r}(p-1)\,B_{n-r} = (-1)^n\big(\sigma_{2n}(p-1) - n\,p\,\sigma_{2n-1}(p-1)\big).$$

dont la dernière est très curieuse en comparaison avec la formule (4).

Posons $p=2$, nous retrouvons de nouveau les formules **9** et **10** de la Table.

Du reste, on pourrait, dans (7) et (8), remplacer les $\sigma_m(p-1)$ par les $\sigma_m(p)$ correspondantes.

La troisième des formules susdites, savoir la formule (23) du paragraphe 5:

$$\chi_m(px) = p^m\chi_m(x) + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{(-1)^r p^{m-r}}{r!}\sigma_r(p-1)\,\chi_{m-r}(x)\,,$$

où $p$ doit être un nombre impair, donnera de la même manière les formules récursives

$$(9)\quad (p^{2n-1}-1)\,T_n + \sum_{r=1}^{r=n-1} (-1)^r\binom{2n-1}{2r} p^{2n-2r-1}\,2^{2r}\,\sigma_{2r}(p-1)\,T_{n-r} = (-1)^{n-1}\,2^{2n-1}\,\sigma_{2n-1}(p-1)\,,$$

$$(10)\quad \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r\binom{2n}{2r+1} p^{2n-2r-1}\,2^{2r}\,\sigma_{2r+1}(p-1)\,T_{n-r} = (-1)^{n-1}\,2^{2n-1}\,\sigma_{2n}(p-1).$$

Dans ces deux formules on pourrait remplacer les $\sigma_m(p-1)$ par les $\sigma_m(p)$ correspondantes, pourvu que nous remplacions en même temps, dans (9), $p^{2n-1}-1$ par $p^{2n-1}+1$.

Pour mettre en pleine lumière la grande flexibilité de nos méthodes générales, nous avons encore à étudier les deux suites parfaites formées des deux polynomes:

$$(11)\quad f_n(x) = \frac{1}{n!}\cdot\sum_{s=1}^{s=p-1}\left(x+\frac{s}{p}\right)^n, \qquad G_n(x) = \frac{1}{n!}\cdot\sum_{s=1}^{s=p-1}(-1)^{s-1}\left(x+\frac{p-s}{p}\right)^n$$

qui figurent à la fin du paragraphe 9.

Nous aurons immédiatement, pour le premier de ces deux polynomes, les deux développements:

$$(12)\quad \frac{1}{2}f_n(x) = \sum_{r=0}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{s_{2r+1}(p-1)}{(2r+1)!\,p^{2r+1}}\varphi_{n-2r}(x)\,,$$

$$(13)\quad \frac{1}{2}f_n(x) = (p-1)\chi_n(x) + \sum_{r=1}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{s_{2r}(p-1)}{(2r)!\,p^{2r}}\chi_{n-2r}(x)\,;$$

posons $x=0$, puis remplaçons $n$ par $2n$ respectivement par $2n+1$, nous aurons respectivement la formule (5) et la formule nouvelle:

$$(14)\quad s_{2n+1}(p-1) = \frac{(-1)^n T_{n+1}}{2^{2n+1}}(p-1)\,p^{2n+1} + \sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^r\binom{2n+1}{2r+1}s_{2n-2r}(p-1)\left(\frac{p}{2}\right)^{2r+1}T_{r+1}\,,$$

dans laquelle on pourrait remplacer les $s_m(p-1)$ par les $s_m(p)$ correspondantes, pourvu que nous remplacions en même temps le facteur $p-1$ du premier terme au second membre par $p+1$.

Quant au polynome $G_n(x)$, nous aurons pour $p$ pair:

$$(15)\qquad \frac{1}{2}G_n(x) = \chi_n(x) + \sum_{r=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\sigma_{2r}(p-1)}{(2r)!\,p^{2r}}\chi_{n-2r}(x),$$

$$(16)\qquad \frac{1}{2}G_n(x) = \sum_{r=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\sigma_{2r+1}(p-1)}{(2r+1)!\,p^{2r+1}}\varphi_{n-2r}(x),$$

tandis que nous trouvons pour $p$ impair:

$$(17)\qquad \frac{1}{2}G_n(x) = \sum_{r=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{\sigma_{2r+1}(p-1)}{(2r+1)!\,p^{2r+1}}\chi_{n-2r-1}(x),$$

$$(18)\qquad \frac{1}{2}G_n(x) = \sum_{r=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{\sigma_{2r+2}(p-1)}{(2r+2)!\,p^{2r+2}}\varphi_{n-2r-1}(x).$$

Posons dans les quatre dernières formules $x=0$, nous aurons, pourvu que $n$ et $p$ soient de parité différente:

$$(19)\qquad \sigma_n(p-1) = \frac{np}{2}\sigma_{n-1}(p-1) + \sum_{r=1}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^r\binom{n}{2r}p^{2r}\sigma_{n-2r}(p-1)B_r,$$

$$(20)\qquad \sigma_n(p-1) = n!\,2p^n\chi_n(0) + \sum_{r=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^r\binom{n}{2r+1}\left(\frac{p}{2}\right)^{2r+1}\sigma_{n-2r-1}(p-1)\,T_{r+1};$$

dans ces deux formules il est permis de remplacer les $\sigma_m(p-1)$ par les $\sigma_m(p)$ correspondantes.

## § 14. Exemples des formules irrégulières.

Pour obtenir des formules récursives d'une nature entièrement différente des précédentes, nous avons à étudier le polynome

$$(1)\qquad \Psi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{2n}{2n-s}\binom{2n-s}{s}\frac{x^{n-s}}{2^{2s}}, \qquad \Psi_0(x) = 2;$$

nous aurons pour $n=1$ et $n=2$ respectivement:

$$(2)\qquad \Psi_1(x) = x+\frac{1}{2}, \qquad \Psi_2(x) = x^2+x+\frac{1}{8}.$$

De plus, il est très facile de vérifier la formule récursive

$$(3) \qquad \left(x+\frac{1}{2}\right) \Psi_p(x) = \Psi_{p+1}(x) + \frac{1}{2^4} \Psi_{p-1}(x), \quad p \geqq 1,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\Psi_1(x) \Psi_p(x) = \Psi_{p+1}(x) + \frac{1}{2^4} \Psi_{p-1}(x), \quad p \geqq 1,$$

d'où, par la conclusion ordinaire de $n$ à $n+1$, la formule plus générale

$$(4) \qquad \Psi_q(x) \Psi_p(x) = \Psi_{p+q}(x) + \frac{1}{2^{4q}} \Psi_{p-q}(x), \quad p \geqq q;$$

c'est-à-dire que nous aurons particulièrement:

$$(5) \qquad \left(x^2+x+\frac{1}{8}\right) \Psi_p(x) = \Psi_{p+2}(x) + \frac{1}{2^8} \Psi_{p-2}(x), \quad p \geqq 2.$$

Cela posé, nous aurons immédiatement la formule curieuse:

$$(6) \qquad \Psi_n(4x^2+4x) = 2^{2n} \Psi_{2n}(x),$$

d'où, en vertu de la définition de $\Psi_n(x)$:

$$(7) \qquad \Psi_{2n}(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{2n}{2n-s} \binom{2n-s}{s} \frac{(x^2+x)^{n-s}}{2^{4s}};$$

appliquons ensuite la formule (3), nous aurons de même:

$$(8) \qquad \Psi_{2n+1}(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \binom{2n-s}{s} \frac{(x^2+x)^{n-s}}{2^{4s}}.$$

De plus, nous aurons, en vertu de (3), par la conclusion ordinaire de $n$ à $n+1$, cet autre développement:

$$(9) \qquad \Psi_n(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s n}{n-s} \binom{n-s}{s} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n-2s}}{2^{4s}}.$$

Les formules que nous venons de développer donnent immédiatement les valeurs numériques

$$(10) \qquad \Psi_n(0) = \frac{1}{2^{2n-1}}, \quad \Psi_n'(0) = \frac{n^2}{2^{2n-2}}, \quad \Psi_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{2^{4n-1}}.$$

Nous avons encore à déterminer cette autre valeur numérique:

$$(11) \qquad \Psi_n\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{a_n}{2^{2n}};$$

les développements (1) et (9) donnent immédiatement pour $a_n$ ces deux expressions:

$$(12) \qquad a_n = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s n}{n-s} \binom{n-s}{s} = (-1)^n \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s 2n}{2n-s} \binom{2n-s}{s},$$

tandis que l'équation fonctionnelle (3) donnera la formule récursive:

(13) $$a_{n-1} = a_n + a_{n-2}, \quad n \geqq 2.$$

Appliquons les valeurs initiales:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1,$$

nous aurons généralement:

(14) $$a_{6n} = 2, \quad a_{6n\pm 1} = 1, \quad a_{6n+3} = -2, \quad a_{6n\pm 2} = -1.$$

Posons pour abréger

$$2\cos n\theta = \Phi_n(2\cos\theta),$$

nous aurons:

$$\Psi_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\,\Phi_{2n}(2i\sqrt{x});$$

c'est-à-dire que l'équation algébrique du degré $n$

(15) $$\Psi_n(x) = 0$$

a les $n$ racines négatives inégales.

(16) $$\alpha_p = -\cos^2\frac{(2p+1)\pi}{4n}, \quad 0 \leqq p \leqq n-1,$$

de sorte que nous aurons

(17) $$\alpha_p + \alpha_{n-p-1} = -1, \quad p \geqq n-p-1.$$

Cela posé, il est évident que $\Psi_n(x)$ représente une solution très intéressante de l'équation fonctionnelle

$$(-1)^n f(-x-1) = f(x),$$

où $f(x)$ est un polynome du degré $n$ par rapport à $x$.

Quant aux applications de $\Psi_n(x)$ dans la théorie des nombres de Bernoulli, nous aurons les deux développements:

(18) $$\frac{1}{2}\Psi_m(x) = K_m + \sum_{s=0}^{\leqq \frac{m-1}{2}} \frac{2m}{2m-2s-1}\binom{2m-2s-1}{2s+1}\frac{(m-2s-1)!}{2^{4s+2}}\,\varphi_{m-2s}(x),$$

(19) $$\frac{1}{2}\Psi_m(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{m}{2}} \frac{m}{m-s}\binom{2m-2s}{2s}\frac{(m-2s)!}{2^{4s}}\,\chi_{m-2s}(x).$$

Dans (18) nous aurons par conséquent:

$$K_{2n+1} = 0;$$

mais je n'ai pas réussi à déterminer sous une simple formule la valeur de $K_{2n}$.

Posons dans (18) $m = 2n+1$, $x = -\frac{1}{4}$, nous aurons, en vertu de (11) et (14), la formule récursive

(20) $$\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s(2n+1)}{4n-2s+1}\binom{4n-2s+1}{2s+1} E_{n-s} = (-1)^n\omega_n,$$

où nous avons posé pour abréger:

$$\omega_{3n} = 0\,, \quad \omega_{3n+1} = -3\,, \quad \omega_{3n+2} = 0.$$

Posons dans la même formule $m = 2n$ et $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, puis soustrayons les deux équations ainsi obtenues, nous aurons:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s 2n}{4n-2s-1} \binom{4n-2s-1}{2s+1} T_{n-s} = 1-(-1)^n. \tag{21}$$

Enfin, différentions par rapport à $x$ la formule (18), puis posons $m = 2n+1$, $x = 0$, il en résulte:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s(2n+1)}{(4n-2s+1)\,2^{4s}} \binom{4n-2s+1}{2s+1} B_{n-s} = \frac{(-1)^{n-1}\,n\,(n+1)}{2^{4n-2}}. \tag{22}$$

Quant à la formule (19), posons $m = 2n-1$, $x = 0$, nous aurons:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s\,(2n-1)}{(2n-s-1)\,2^{2s}} \binom{4n-2s-2}{2s} T_{n-s} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}}, \tag{23}$$

tandis que les hypothèses $m = 2n$, $x = -\frac{1}{2}$ donnent:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s\,n}{(2n-s)\,2^{2s}} \binom{4n-2s}{2s} E_{n-s} = \frac{1-(-1)^n}{2^{2n}}. \tag{24}$$

On voit que plusieurs des formules récursives que nous venons de trouver sont homogènes.

Différentions plusieurs fois par rapport à $x$ les formules (18) et (19), nous trouverons des formules récursives irrégulières d'une forme plus compliquée.

# CHAPITRE IV.

## Formules linéaires incomplètes.

### § 15. **Étude d'un polynome entier.**

Désignons par $x$ et $a$ deux variables complexes, par $n$ et $p$ deux nombres entiers non négatifs, nous avons à étudier le polynome entier du degré $n+p$:

$$f(x) = (x+a)^n (x+1-a)^p. \tag{1}$$

Écrivons

$$f(x) = (x+a)^n \big((x+a) + (1-2a)\big)^p,$$

nous aurons, en appliquant la formule binomiale:

$$(2)\qquad f(x) = \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} (1-2a)^s (x+a)^{n+p-s},$$

et il est évident que l'identité

$$f(x-1) = (x-a)^p \big((x-a) - (1-2a)\big)^n$$

donnera de même:

$$(3)\qquad f(x-1) = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{n}{s} (1-2a)^s (x-a)^{n+p-s}.$$

Cela posé, additionnons, puis soustrayons les formules (2) et (3), nous aurons ces deux développements:

$$(4)\qquad \begin{cases} f(x) = \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} (n+p-s)!\,(1-2a)^s \chi_{n+p-s}(x+a) + \\ \qquad + \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} (n+p-s)!\,(1-2a)^s \chi_{n+p-s}(x-a), \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} f(x) = K_{n,p}(a) + \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} (n+p-s)!\,(1-2a)^s \varphi_{n+p-s+1}(x+a) - \\ \qquad - \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} (n+p-s)!\,(1-2a)^s \varphi_{n+p-s+1}(x-a), \end{cases}$$

où le terme $K_{n,p}(a)$ qui figure au second membre de (5) est indépendent de la variable $x$.

Pour déterminer la valeur de $K_{n,p}(a)$ nous différentions par rapport à $x$ la formule (5), ce qui donnera:

$$(6)\qquad \begin{cases} f'(x) = \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} (n+p-s)!\,(1-2a)^s \varphi_{n+p-s}(x+a) - \\ \qquad - \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} (n+p-s)!\,(1-2a)^s \varphi_{n+p-s}(x-a), \end{cases}$$

et nous aurons évidemment:

$$(7)\qquad f'(x) = n(x+a)^{n-1}(x+1-a)^p + p(x+a)^n(x+1-a)^{p-1}.$$

Développons maintenant, en vertu de (5), les deux fonctions qui figurent au second membre de (7), nous trouvons précisément tous les termes du second membre de la formule (6), mais nous trouvons en outre un terme qui est indépendent de $x$; c'est-à-dire que ce terme constant par rapport à $x$ s'évanouira, de sorte que nous aurons:

$$nK_{n-1,p}(a) + pK_{n,p-1}(a) = 0,$$

ou, ce qui est la même chose:

$$K_{n,\,p}(\alpha) = -\frac{p}{n+1} K_{n+1,\,p-1}(\alpha)\,;$$

c'est-à-dire que nous aurons:

$$K_{n,\,p}(\alpha) = \frac{(-1)^p\, n!\, p!}{(n+p)!} K_{n+p,\,0}(\alpha). \tag{8}$$

Or, l'identité évidente

$$\frac{(x+\alpha)^m}{m!} - \frac{(x+\alpha-1)^m}{m!} = \frac{(x+\alpha)^m}{m!} - \sum_{s=0}^{s=m} \frac{(-1)^s (1-2\alpha)^s (x-\alpha)^{m-s}}{s!\,(m-s)!}$$

donnera:

$$\frac{(x+\alpha)^m}{m!} = \varphi_{m+1}(x+\alpha) - \sum_{s=0}^{s=m+1} \frac{(-1)^s (1-2\alpha)^s}{s!} \varphi_{m-s+1}(x-\alpha)\,; \tag{9}$$

car les deux membres de la formule (9) sont des éléments de deux suites harmoniques.

Remarquons ensuite que la formule (9) peut être obtenue directement de (5) si nous posons $p=0$, $n=m$ et si nous divisons ensuite par $m!$.

Cela posé, nous aurons:

$$K_{m,\,0}(x) = \frac{(-1)^m (1-2\alpha)^{m+1}}{m+1}\,,$$

d'où, en vertu de (8), généralement:

$$K_{n,\,p}(x) = \frac{(-1)^n\, n!\, p!}{(n+p+1)!} (1-2\alpha)^{n+p+1}. \tag{10}$$

Soit ensuite $q < n+p$ un positif entier, la formule (4) donnera:

$$\left\{\begin{aligned} D_x^q\Big[(x+\alpha)^n (x+1-\alpha)^p\Big] &= \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} (n+p-s)!\,(1-2\alpha)^s \chi_{n+p-q-s)}(x+\alpha) + \\ &+ \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} (n+p-s)!\,(1-2\alpha)^s \chi_{n+p-q-s}(x-\alpha)\,, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

où il faut supprimer les termes contenant des fonctions d'Euler à indice négatif.

Remarquons que la formule (4) est un cas particulier de (11), c'est-à-dire correspond à $q=0$.

La formule (5) donnera de même:

$$\left\{\begin{aligned} D_x^{q+1}\Big[(x+\alpha)^n (x+1-\alpha)^p\Big] &= \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} (n+p-s)!\,(1-2\alpha)^s \varphi_{n+p-q-s}(x+\alpha) - \\ &- \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} (n+p-s)!\,(1-2\alpha)^s \varphi_{n+p-q-s}(x-\alpha)\,, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

où il faut supprimer les termes contenant des fonctions de BERNOULLI à indice négatif.

Il est évident que la formule (5) n'est pas un cas particulier de (12); c'est-à-dire qu'il faut étudier séparément la seule formule (5) et l'ensemble des formules (12).

Il est très interessant, ce me semble, que nos identités algébriques précédentes nous donnent, d'un seul coup, toutes les formules incomplètes de première espèce connues et un grand nombre d'autres. On sait que les formules connues de ce genre ont été trouvées par des méthodes différentes.

## § 16. **Formules de M. Saalschütz.**

Posons, dans notre formule générale (5) du paragraphe 15, $a = 0$, la fonction $\varphi_{n+p+1}(x)$ disparaîtra, de sorte que nous aurons, après une légère modification, le développement suivant:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x^n(x+1)^p &= \frac{(-1)^n n!\,p!}{(n+p+1)!} + \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{p}{s+1} (n+p-s-1)!\,\varphi_{n+p-s}(x) + \\ &+ \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{n}{s+1} (n+p-s-1)!\,\varphi_{n+p-s}(x), \end{aligned} \right.$$

ce qui nous donnera les formules incomplètes que M. SAALSCHÜTZ[1]) a trouvées à l'aide de la formule sommatoire d'EULER et de MAC LAURIN.

1° Supposons tout d'abord $n+p$ pair, savoir:

$$(2) \qquad n+p = 2m,$$

puis posons $x = 0$, nous aurons la formule incomplète:

$$(3) \quad \frac{(-1)^{m+n} n!\,p!}{(2m+1)!} = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{p-1}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+1} \frac{B_{m-s}}{2m-2s} + \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+1} \frac{B_{m-s}}{2m-2s},$$

d'où particulièrement pour $p = n$, ce qui donnera également $m = n$, la formule plus élégante

$$(4) \quad \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+1} \frac{B_{n-s}}{n-s} = \frac{n!\,n!}{(2n+1)!}.$$

Supposons dans cette formule $n = 2q$ respectivement $n = 2q+1$, nous verrons qu'elle contient respectivement l'ensemble des nombres de BERNOULLI:

$$B_{2q},\ B_{2q-1},\ \ldots.,\ B_{q+1},$$
$$B_{2q+1},\ B_{2q},\ \ldots.,\ B_{q+1}.$$

[1]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 37, p. 374—378; 1892. Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, p. 185—189; Berlin 1893.

Posons, au contraire, dans (1), $x = -\frac{1}{2}$, puis ajoutons l'équation ainsi obtenue à la formule (3), puis multiplions par $2^{4m-1}$, nous aurons:

$$(5) \qquad (-1)^{m+n}\, 2^{2m-1} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-1}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+1} 2^{4s}\, T_{m-s} + \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+1} 2^{4s}\, T_{m-s}\,,$$

ce qui donnera particulièrement pour $p = n = m$:

$$(6) \qquad 2^{2n-2} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+1} 2^{4s}\, T_{n-s}\,,$$

formule qui est du même caractère que (4).

2° Supposons ensuite $n+p$ impair, savoir:

$$(7) \qquad n+p = 2m+1\,,$$

la formule (1) donnera pour $x = 0$:

$$(8) \qquad \frac{(-1)^{m+n}\, n!\, p!}{(2m+2)!} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-2}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+2} \frac{B_{m-s}}{2m-2s} - \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-2}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+2} \frac{B_{m-s}}{2m-2s}\,,$$

d'où, pour $p = n+1$, après un simple calcul, la formule (4).

Posons encore, dans (1), $x = -\frac{1}{2}$, nous aurons par le procédé ordinaire:

$$(9) \qquad (-1)^{m+n}\, 2^{2m-2} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-2}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+2} 2^{4s}\, T_{m-s} - \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-2}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+2} 2^{4s}\, T_{m-s}\,;$$

soit $p = n+1$, ce qui donnera $m = n$, nous retrouvons, après un simple calcul, la formule (6).

## § 17. Généralisations des formules de Stern.

Supposons, dans la formule générale (12) du paragraphe 15, $\alpha = 0$, remplaçons $q$ par $q-1$, où

$$1 \leq q \leq n-1\,,$$

puis posons pour abréger:

$$(1) \qquad n+p = m+q\,,$$

l'hypothèse $x = 0$ donnera:

$$(2) \quad 0 = \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{p}{s+1} (m+q-s-1)!\, \varphi_{m-s}(0) + \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{n}{s+1} (m+q-s-1)!\, \varphi_{m-s}(0).$$

1° Soit $m$ un nombre pair; nous posons $2m$ au lieu de $m$; divisons ensuite par $(q-1)!$ les deux membres de (2), nous aurons:

$$(3)\quad 0=\sum_{s=0}^{\leqq\frac{p-1}{2}}(-1)^s\binom{p}{2s+1}\binom{2m+q-2s-1}{q-1}B_{m-s}+\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n-1}{2}}(-1)^s\binom{n}{2s+1}\binom{2m+q-2s-1}{q-1}B_{m-s},$$

formule, dont le cas particulier $q=1$ appartient à STERN[1]). Posons par conséquent

$$n+p = 2m+1,$$

nous aurons

$$(4)\qquad 0=\sum_{s=0}^{\leqq\frac{p-1}{2}}(-1)^s\binom{p}{2s+1}B_{m-s}+\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n-1}{2}}(-1)^s\binom{n}{2s+1}B_{m-s}.$$

On voit que la plus simple de ces formules correspond à $p=n+1$, ce qui donnera $m=n$, et la formule récursive correspondante deviendra:

$$(5)\qquad 0=\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}}(-1)^s\binom{n+1}{2s+1}B_{n-s}+\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n-1}{2}}(-1)^s\binom{n}{2s+1}B_{n-s},\qquad n\geqq 2.$$

Supposons $n=2q$, respectivement $n=2q+1$, la formule (5) contiendra respectivement l'ensemble des nombres de BERNOULLI:

$$B_{2q},\ B_{2q-1},\ \ldots,\ B_q,$$
$$B_{2q+1},\ B_{2q},\ \ldots,\ B_{q+1};$$

c'est-à-dire que la formule (5) est, pour $n=2q$, moins avantageuse que la formule analogue (4) du paragraphe 16.

Soit ensuite $q=2$, ce qui donnera:

$$n+p = 2m+2;$$

nous aurons:

$$(6)\quad 0=\sum_{s=0}^{\leqq\frac{p-1}{2}}(-1)^s\binom{p}{2s+1}(2m-2s+1)B_{m-s}+\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n-1}{2}}(-1)^s\binom{n}{2s+1}(2m-2s+1)B_{m-s};$$

remplaçons dans cette formule $n$ et $p$ par $n+1$, ce qui donnera $m=n$; nous aurons la formule la plus simple de ce genre, savoir la formule de SEIDEL[2]):

$$(7)\qquad 0=\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}}(-1)^s\binom{n+1}{2s+1}(2n-2s+1)B_{n-s},\qquad n\geqq 2.$$

[1]) Beiträge zur Theorie der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, p. 7—16. Mémoires de la Société de Gœttingue 1878.

[2]) Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1877, p. 164—165.

On voit que la formule de SEIDEL contient précisément les mêmes nombres de BERNOULLI que la formule (5).

2° Soit, dans (1) et (2), $m$ un nombre impair, nous remplaçons $m$ par $2m+1$, ce qui donnera:

$$(8)\quad \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-2}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+2} \binom{2m+q-2s-1}{q-1} B_{m-s} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-2}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+2} \binom{2m+q-2s-1}{q-1} B_{m-s};$$

posons particulièrement $q=1$, ce qui donnera:

$$n+p = 2m+2;$$

nous aurons la formule de STERN:

$$(9)\quad \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-2}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+2} B_{m-s} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-2}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+2} B_{m-s}.$$

La formule la plus simple de cette catégorie correspond à $p=n+2$, ce qui donnera $m=n$.

Posons, dans (8), $q=2$, ce qui donnera:

$$n+p = 2m+3;$$

nous aurons la formule

$$(10)\quad \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-2}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+2} (2m-2s-1) B_{m-s} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-2}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+2} (2m-2s-1) B_{m-s},$$

dont le cas le plus simple correspond à $p=n+1$, ce qui nous conduira à la formule (7) de SEIDEL.

Quant à la formule générale (11) du paragraphe 15, nous posons $a=0$; supposons ensuite

$$0 \leq q \leq n-1,$$

l'hypothèse $x=0$ donnera, avec la définition (1) du nombre $m$:

$$(11)\quad \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} (m+q-s)!\,\chi_{m-s}(0) + \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} (m+q-s)!\,\chi_{m-s}(0) = 0.$$

1° Soit $m$ un nombre impair, nous remplaçons $m$ par $2m+1$, ce qui donnera, après une division par $q!$:

$$(12)\quad \sum_{s=0}^{\leq \frac{p}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s} \binom{2m+q-2s+1}{q} 2^{2s} T_{m-s+1} + \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s} \binom{2m+q-2s+1}{q} 2^{2s} T_{m-s+1} = 0;$$

le cas particulier correspondant à $q=0$ appartient à STERN [1]); posons encore

[1]) loc. cit.

$p=n+1$, ce qui donnera $m=n$, nous trouvons la formule la plus simple de ce genre.

Posons encore $q=1$, nous obtenons la formule la plus simple en supposant $p=n$, ce qui donnera $m=n-1$. De cette manière nous trouvons la formule de SEIDEL[1]):

$$(13)\qquad \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s} (n-s)\, 2^{2s}\, T_{n-s} = 0\,, \qquad n \geqq 2\,,$$

ou, ce qui est évidemment la même chose:

$$(14)\qquad \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s} (2^{2n-2s}-1)\, B_{n-s} = 0\,, \qquad n \geqq 2.$$

2° Soit ensuite, dans (11), $m$ un nombre pair, nous aurons, en remplaçant $m$ par $2m$:

$$(15)\quad \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-1}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+1} \binom{2m+q-2s-1}{q} 2^{2s}\, T_{m-s} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+1} \binom{2m+q-2s-1}{q} 2^{2s}\, T_{m-s}\,,$$

dont le cas particulier $q=0$ est dû à STERN; posons $p=n+2$, ce qui donnera $m=n+1$, nous aurons la formule la plus simple de ce genre.

Posons encore $q=1$, $p=n+1$, ce qui donnera $m=n$, nous retrouvons la formule (13) de SEIDEL.

## § 18. Formules contenant les nombres d'Euler.

Il est évident que les formules générales (11) et (12) du paragraphe 15 ne nous donnent, pour $\alpha=0$, de formules élégantes que dans le cas où $x=0$; car les dérivées qui figurent aux premiers membres des formules susdites seront très compliquées pour d'autres valeurs de $x$.

Quant aux nombres d'EULER, nous avons par conséquent à prendre pour point de départ les formules (4) et (5) du paragraphe 15. Posons, dans la première de ces deux formules, $\alpha=0$, nous aurons:

$$(1)\quad x^n (x+1)^p = \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} (n+p-s)!\, \chi_{n+p-s}(x) + \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} (n+p-s)!\, \chi_{n+p-s}(x).$$

Supposons ensuite $x=-\frac{1}{2}$, nous aurons selon que $n+p=2m$ ou $n+p=2m+1$ respectivement:

[1]) loc. cit. p. 172.

$$(2)\qquad (-1)^{m+n}2 = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s} 2^{2s} E_{m-s} + \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s} 2^{2s} E_{m-s},$$

$$(3)\qquad (-1)^{m+n} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-1}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+1} 2^{2s} E_{m-s} - \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+1} 2^{2s} E_{m-s}.$$

Soit maintenant $p = n$, $p = n+1$, ce qui donnera $m = n$, nous aurons la formule élégante:

$$(4)\qquad 1 = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s} 2^{2s} E_{n-s}.$$

Posons $n = 2q$ respectivement $n = 2q+1$, nous verrons que la formule (4) contient respectivement l'ensemble de nombres d'Euler:

$$E_{2q},\ E_{2q-1},\ \ldots,\ E_q,$$
$$E_{2q+1},\ E_{2q},\ \ldots,\ E_{q+1}.$$

Aux formules précédentes, dues à M. A. Radicke[1]), nous aurons à ajouter quelques autres du même genre.

En premier lieu prenons pour point de départ la formule

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} x^n(x+1)^p &= \frac{(-1)^n n!\,p!}{(n+p+1)!} + \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{p}{s+1} (n+p-s-1)!\,\varphi_{n+p-s}(x) + \\ &\quad + \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{n}{s+1} (n+p-s-1)!\,\varphi_{n+p-s}(x), \end{aligned} \right.$$

tirée de (5) du paragraphe 15 en posant $\alpha = 0$, puis posons $x = -\frac{1}{4}$, $x = -\frac{3}{4}$, nous aurons en soustrayant les deux équations ainsi obtenues, selon que $n+p = 2m+1$ ou $n+p = 2m+2$ respectivement:

$$(6)\qquad \frac{(-1)^{m+n}(3^p - 3^n)}{2} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-1}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+1} 2^{4s} E_{m-s} + \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+1} 2^{4s} E_{m-s},$$

$$(7)\qquad \frac{(-1)^{m+n}(3^p - 3^n)}{8} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-2}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+2} 2^{4s} E_{m-s} - \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-2}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+2} 2^{4s} E_{m-s},$$

d'où, en posant $p = n+1$ respectivement $p = n+2$, les deux formules plus simples

---

[1]) Journal de Crelle, t. 89, p. 257—261; 1880.

$$(8)\qquad 3^n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n+1}{2s+1} 2^{4s} E_{n-s} + \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+1} 2^{4s} E_{n-s},$$

$$(9)\qquad 3^n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n+2}{2s+2} 2^{4s} E_{n-s} - \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-2}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+2} 2^{4s} E_{n-s};$$

ces deux formules particulières sont également dues à M. Radicke.

En second lieu, différentions par rapport à $x$ la formule (1), puis posons $x = -\frac{1}{2}$, nous aurons, selon que $n+p = 2m+1$ ou $n+p = 2m+2$ respectivement:

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} (-1)^{m+n}(2p-2n) &= \sum_{s=0}^{\leq \frac{p}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s} (2m-2s+1)\, 2^{2s} E_{m-s} + \\ &+ \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s} (2m-2s+1)\, 2^{2s} E_{m-s}, \end{aligned}\right.$$

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} (-1)^{m+n}(p-n) &= \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-1}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+1} (2m-2s+1)\, 2^{2s} E_{m-s} - \\ &- \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+1} (2m-2s+1)\, 2^{2s} E_{m-s}, \end{aligned}\right.$$

formules dont les cas les plus simples correspondent à $p = n+1$ respectivement $p = n+2$, ce qui donnera $m = n$.

## § 19. **Autres formules incomplètes.**

Posons dans la formule générale (5) du paragraphe 15

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad x = -\frac{1}{4},$$

nous aurons:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 = \frac{(-1)^n n!\, p!}{(n+p+1)!\, 2^{n+p+1}} &+ \sum_{s=0}^{s=p} \frac{(n+p-s)!}{2^s} \binom{p}{s} \varphi_{n+p-s+1}(0) - \\ &- \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s (n+p-s)!}{2^s} \binom{n}{s} \varphi_{n+p-s+1}\left(-\frac{1}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

1° Soit, dans cette formule, $n+p=2m-1$, nous aurons:

$$(2)\quad \frac{(-1)^{m+n}n!\,p!}{(2m)!}=\sum_{s=0}^{\leq\frac{p}{2}}(-1)^s\binom{p}{2s}\frac{2^{2m-2s}B_{m-s}}{2m-2s}+\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}(-1)^s\binom{n}{2s}\frac{2^{2m-2s}-2}{2m-2s}B_{m-s},$$

d'où pour $p=n-1$, ce qui donnera $m=n$, la formule la plus élégante de ce genre:

$$(3)\qquad \frac{n!\,n-1!}{(2n)!}=\sum_{s=1}^{\leq\frac{n}{2}}(-1)^{s-1}\binom{n-1}{2s-1}\frac{2^{2n-2s}B_{n-s}}{2n-2s}+\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}(-1)^s\binom{n}{2s}\frac{T_{n-s}}{2^{2n-2s-1}}.$$

2° Supposons, dans (2), $n+p=2m$, nous aurons de même:

$$(4)\quad \frac{(-1)^{m+n}n!\,p!}{(2m+1)!}=\sum_{s=0}^{\leq\frac{p-1}{2}}(-1)^s\binom{p}{2s+1}\frac{2^{2m-2s}B_{m-s}}{2m-2s}-\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}}(-1)^s\binom{n}{2s+1}\frac{2^{2m-2s}-2}{2m-2s}B_{m-s},$$

ce qui donnera pour $p=n=m$ la formule de M. Saalschütz, savoir la formule (4) du paragraphe 16.

Posons ensuite, dans la formule (12) du paragraphe 15,

$$x=-\frac{1}{4},\quad \alpha=\frac{1}{4},\quad n+p=m+q;\qquad 0\leq q\leq n-2,$$

nous aurons:

$$(5)\qquad \sum_{s=0}^{s=p}\binom{p}{s}\frac{(m+q-s)!}{2^s}\varphi_{m-s}(0)=\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\binom{n}{s}\frac{(m+q-s)!}{2^s}\varphi_{m-s}\left(-\frac{1}{2}\right).$$

1° Soit $m$ un nombre pair, nous remplaçons $m$ par $2m$, ce qui donnera:

$$(6)\quad \sum_{s=0}^{\leq\frac{p}{2}}(-1)^s\binom{p}{2s}\binom{2m+q-2s}{q}2^{2m-2s}B_{m-s}+\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}(-1)^s\binom{n}{2s}\binom{2m+q-2s}{q}(2^{2m-2s}-2)B_{m-s}=0;$$

posons dans cette formule $q=0$ et $p=n=m$, nous retrouvons la formule de Seidel, savoir la formule (14) du paragraphe 17.

2° Supposons $m$ impair, posons $2m+1$ au lieu de $m$, nous aurons, en vertu de (5):

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\leq\frac{p-1}{2}}(-1)^s\binom{p}{2s+1}\binom{2m+q-2s}{q}2^{2m-2s}B_{m-s}=\\ &=\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}}(-1)^s\binom{n}{2s+1}\binom{2m+q-2s}{q}(2^{2m-2s}-2)B_{m-s}.\end{aligned}\right.$$

d'où pour $q=0$, $p=n+1$, ce qui donnera $m=n$:

$$(8)\qquad \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s} 2^{2n-2s} B_{n-s} + 2 \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+1} B_{n-s} = 0, \quad n \geqq 2.$$

En dernier lieu nous avons à étudier la formule (11) du paragraphe 15; posons:

$$x = -\frac{1}{4}, \quad \alpha = \frac{1}{4}, \quad n+p = m+q; \qquad 0 \leqq q \leqq n-1,$$

nous aurons:

$$(9)\qquad 0 = \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} \frac{(m+q-s)!}{2^s} \chi_{m-s}(0) + \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \frac{(m+q-s)!}{2^s} \chi_{m-s}\left(-\frac{1}{2}\right);$$

remplaçons ensuite $m$ par $2m$ respectivement par $2m+1$, nous aurons:

$$(10)\qquad \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-1}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+1} \binom{2m+q-2s-1}{q} T_{m-s} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s} \binom{2m+q-2s}{q} E_{m-s},$$

$$(11)\qquad \sum_{s=0}^{\leq \frac{p}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s} \binom{2m+q-2s+1}{q} T_{m-s+1} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+1} \binom{2m+q-2s}{q} E_{m-s},$$

formules dont le cas particulier $q=0$ appartient à STERN[1]).

# CHAPITRE V.

## Formules récursives non linéaires.

### § 20. Développements divers.

Remarquons que les $\varphi_n(x)$ et les $\chi_n(x)$ forment des suites parfaites, les expressions explicites de ces deux fonctions donnent les développements suivants:

$$(1)\qquad \frac{1}{2}\varphi_m(x) = \chi_m(x) + \sum_{s=1}^{\leq \frac{m}{2}} \frac{(-1)^{s-1} B_s}{(2s)!} \chi_{m-2s}(x),$$

$$(2)\qquad \chi_m(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{m}{2}} \frac{(-1)^s T_{s+1}}{(2s+1)!\, 2^{2s+1}} \varphi_{m-2s}(x).$$

[1]) Beiträge etc. p. 31—34.

Supposons ensuite $x=0$ et $m=2n-1$ respectivement $m=2n$, nous aurons:

$$(3)\qquad T_n = \sum_{s=1}^{s=n-1}{}' \binom{2n-1}{2s} 2^{2s} B_s T_{n-s},$$

tandis que les hypothèses $x=-\frac{1}{2}$, $m=2n$ donnent ces deux autres formules:

$$(4)\qquad E_n = 2(2^{2n}-1)B_n + \sum_{s=1}^{s=n-1}{}' \binom{2n}{2s} 2^{2s} B_s E_{n-s},$$

$$(5)\qquad (2n+1)E_n - T_{n+1} = \sum_{s=0}^{s=n-1}{}' \binom{2n+1}{2s+1}(2^{2n-2s}-2) B_{n-s} T_{s+1}.$$

Appliquons ensuite les identités:

$$2^{m-1}\varphi_m\left(\frac{x}{2}\right) + 2^{m-1}\varphi_m\left(\frac{x-1}{2}\right) = \varphi_m(x),$$

$$2^{m-1}\varphi_m\left(\frac{x}{2}\right) - 2^{m-1}\varphi_m\left(\frac{x-1}{2}\right) = \chi_{m-1}(x),$$

nous aurons de même:

$$(6)\qquad 2^{m-1}\varphi_m\left(\frac{x}{2}\right) = \chi_m(x) + \frac{1}{2}\chi_{m-1}(x) + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{m}{2}}{}' \frac{(-1)^{s-1}B_s}{(2s)!}\chi_{m-2s}(x),$$

$$(7)\qquad 2^{m-1}\varphi_m\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi_m(x) + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{m+1}{2}}{}' \frac{(-1)^{s-1}T_s}{(2s-1)!\,2^{2s}}\varphi_{m-2s+1}(x),$$

tandis que les formules:

$$2^{m+1}\chi_m\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^m}{m!} + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{m+1}{2}}{}' \frac{(-1)^{s-1}T_s}{(2s-1)!}\cdot\frac{x^{m-2s+1}}{(m-2s+1)!},$$

$$2^{m+1}\chi_m\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{x^m}{m!} + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{m}{2}}{}' \frac{(-1)^{s}E_s}{(2s)!}\cdot\frac{x^{m-2s}}{(m-2s)!},$$

tirées directement des formules (18) du paragraphe 3 et (10) du paragraphe 5, donnent ces deux autres développements:

$$(8)\qquad 2^{m+1}\chi_m\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{m}{2}}{}' \frac{(-1)^{s}T_{s+1}}{(2s+1)!}\varphi_{m-2s}(x) + \sum_{s=0}^{\leqq \frac{m-1}{2}}{}' \frac{(-1)^{s}E_{s+1}}{(2s+2)!}\varphi_{m-2s-1}(x),$$

$$(9)\qquad 2^{m+1}\chi_m\left(\frac{x}{2}\right) = 2\chi_m(x) + \sum_{s=0}^{\leqq \frac{m-1}{2}}{}' \frac{(-1)^{s}T_{s+1}}{(2s+1)!}\chi_{m-2s-1}(x) - \sum_{s=0}^{\leqq \frac{m-2}{2}}{}' \frac{(-1)^{s}E_{s+1}}{(2s+2)!}\chi_{m-2s-2}(x).$$

On voit que les développements (6) et (7) nous conduiront aux formules (3), (4) et (5). Posons, au contraire, dans (8), $x = 0$ et $m = 2n$ respectivement $m = 2n-1$, nous aurons:

$$T_{n+1} - \left(n + \frac{1}{2}\right) E_n = \sum_{s=1}^{s=n}{}' \binom{2n+1}{2s-1} T_s B_{n-s+1}, \tag{10}$$

$$E_n - n T_n = \sum_{s=1}^{s=n-1}{}' \binom{2n}{2s} E_s B_{n-s}. \tag{11}$$

Quant à la formule (9), nous aurons pour les mêmes valeurs de $x$ et $m$

$$(2^{2n-1} - 2) T_n = \sum_{s=1}^{s=n-1}{}' \binom{2n-1}{2s} 2^{2s} E_s T_{n-s}, \tag{12}$$

$$2^{2n-1} E_n = \sum_{s=0}^{s=n-1}{}' \binom{2n}{2s+1} 2^{2s} T_{s+1} T_{n-s}. \tag{13}$$

Revenons maintenant aux formules (18) du paragraphe 2 et (20) du paragraphe 3, savoir

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \varphi_{m-1}(x) = m \varphi_m(x) + \sum_{s=1}^{\leq \frac{m}{2}}{}' \frac{(-1)^{s-1} B_s}{(2s)!} \varphi_{m-2s}(x), \tag{14}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \chi_m(x) = (m+1) \chi_{m+1}(x) + \sum_{s=0}^{\leq \frac{m-1}{2}}{}' \frac{(-1)^s T_{s+1}}{(2s+1)!\, 2^{2s+2}} \chi_{m-2s-1}(x); \tag{15}$$

posons, dans (14), $m = 2n$ et $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, nous aurons respectivement:

$$(2n+1) B_n = \sum_{s=1}^{s=n-1}{}' \binom{2n}{2s} B_s B_{n-s}, \tag{16}$$

$$\left((2n-1) 2^{2n} - 4n\right) B_n = \sum_{s=1}^{s=n-1}{}' \binom{2n}{2s} (2^{2n} - 2^{2s+1}) B_s B_{n-s}, \tag{17}$$

d'où, en multipliant par $2^{2n}$ la formule (16), puis soustrayant de (17) l'équation ainsi obtenue:

$$(2^{2n} + 2n) B_n = \sum_{s=1}^{s=n-1}{}' \binom{2n}{2s} 2^{2s} B_s B_{n-s}, \tag{18}$$

tandis que nous aurons en additionnant les formules susdites, puis introduisant les $T_n$:

$$2n T_n = \sum_{s=1}^{s=n-1}{}' \binom{2n-1}{2s} 2^{4s} B_s T_{n-s}. \tag{19}$$

La formule (16) appartient à EULER[1]).

Posons ensuite, dans (14), $x = -\frac{1}{4}$, $m = 2n+1$, respectivement $m = 2n$, nous aurons:

$$(20) \qquad (2n+1)E_n - (2^{2n}+2)(2^{2n}-1)B_n = \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n}{2s} 2^{4s} B_s E_{n-s},$$

$$(21) \qquad 2n(2n-1)E_{n-1} + \left(2n(2^{2n}-2) - 2^{4n}\right)B_n = \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n}{2s} (2^{2n-2s}-2)\, 2^{4s} B_s B_{n-s};$$

soustrayons les formules (4) et (20), puis, en introduisant les $T_n$, nous aurons la formule de SCHERK[2]):

$$(22) \qquad E_n - T_n = \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n-1}{2s-1} T_s E_{n-s},$$

tandis que nous retrouvons la formule (5) en soustrayant (17) de (21).

Quant à la formule (15), les hypothèses $m = 2n$, $x = 0$ respectivement $x = -\frac{1}{2}$ donnent:

$$(23) \qquad T_{n+1} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{2n}{2s+1} T_{s+1} T_{n-s}$$

respectivement la formule (22) de SCHERK; la formule (23) est due à EULER[3]).

## § 21. Formules d'addition.

Il est très facile de généraliser beaucoup les formules (6) et (7), (14) et (15) du paragraphe 20.

En effet, écrivons comme suit les formules en question:

$$(1) \qquad (x+1)\varphi_{n-1}(x) - (n-1)\varphi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \varphi_s(0)\varphi_{n-s}(x),$$

$$(2) \qquad (x+1)\chi_n(x) - (n+1)\chi_{n+1}(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \chi_s(0)\chi_{n-s}(x),$$

$$(3) \qquad 2^{n-1}\varphi_n\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{s=0}^{s=n} \chi_s(0)\varphi_{n-s}(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \varphi_s(0)\chi_{n-s}(x),$$

---

[1]) Institutiones calculi differentialis, p. 416; Saint-Pétersbourg 1755. Opuscula analytica, t. II, p. 266; Saint-Pétersbourg 1785.

[2]) Mathematische Abhandlungen; Berlin 1825.

[3]) Institutiones calculi differentialis, p. 495.

je dis, que nous aurons les formules générales:

$$(4)\qquad (x+y+1)\varphi_{n-1}(x+y)-(n-1)\varphi_n(x+y)=\sum_{s=0}^{s=n}\varphi_{n-s}(x)\varphi_s(y),$$

$$(5)\qquad (x+y+1)\chi_n(x+y)-(n+1)\chi_{n+1}(x+y)=\sum_{s=0}^{s=n}\chi_{n-s}(x)\chi_s(y),$$

$$(6)\qquad 2^{n-1}\varphi_n\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sum_{s=0}^{s=n}\varphi_{n-s}(x)\chi_s(y).$$

En effet, remarquons que les deux membres de chacune des trois formules générales forment des suites harmoniques qui deviennent égales deux à deux pour $y=0$; le théorème II du paragraphe 1 nous conduira immédiatement au but.

Posons maintenant dans nos trois formules générales $y=-x-1$, puis remplaçons $n$ par $2n$, les équations fonctionnelles (1) du paragraphe 5 donnent immédiatement les formules remarquables

$$(7)\qquad \frac{(-1)^n(2n-1)B_n}{(2n)!}=\sum_{s=0}^{s=2n}(-1)^s\varphi_s(x)\varphi_{2n-s}(x),$$

$$(8)\qquad \frac{(-1)^nT_{n+1}}{(2n)!\,2^{2n+2}}=\sum_{s=0}^{s=2n}(-1)^s\chi_s(x)\chi_{2n-s}(x),$$

$$(9)\qquad \frac{(-1)^n(2^{2n-1}-1)B_n}{(2n)!}=\sum_{s=0}^{s=2n}(-1)^s\chi_s(x)\varphi_{2n-s}(x).$$

Remarquons que les hypothèses $x=0$ ou $y=0$ sont étudiées dans le paragraphe précédent, il nous reste encore à considérer les deux cas suivants:

1° Posons dans (7), (8) et (9) $x=y=-\frac{1}{2}$, nous aurons respectivement:

$$(10)\qquad \left((2n-3)2^{2n}+4\right)B_n=\sum_{s=1}^{s=n-1}\binom{2n}{2s}(2^{2s}-2)(2^{2n-2s}-2)B_sB_{n-s},$$

$$(11)\qquad T_{n+1}-2E_n=\sum_{s=1}^{s=n-1}\binom{2n}{2s}E_sE_{n-s},$$

$$(12)\qquad (2^{2n}-1)(2^{2n}-2)B_n-E_n=\sum_{s=1}^{s=n-1}\binom{2n}{2s}(2^{2s}-2)B_sE_{n-s};$$

soustrayons, puis additionnons les formules (12) et (4) du paragraphe 20, nous aurons la formule (11) du paragraphe 20 respectivement

$$(13)\qquad (2^{2n-1}-2)T_n=\sum_{s=1}^{s=n-1}\binom{2n-1}{2s-1}2^{2n-2s}T_sE_{n-s}.$$

$2^{\circ}$ Posons, dans (1), $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$, puis remplaçons $n$ par $2n$ respectivement par $2n+1$, nous aurons:

$$(14)\qquad (2n-1)E_n - (2^{2n}-1)(2^{2n}-2)B_n = \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n}{2s}(2^{2s}-2)2^{2s}B_s E_{n-s}\,,$$

$$(15)\qquad 2n(2n-1)E_{n-1} - (2n+2^{2n})(2^{2n}-2)B_n = \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n}{2s}(2^{2n-2s}-2)(2^{2s}-2)2^{2s}B_s B_{n-s}\,,$$

d'où en soustrayant (12) de (14)

$$(16)\qquad 2^{2n}E_n - (2^{2n+1}-4)T_n = \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n-1}{2s-1}(2^{2s}-2)2^{2n-2s}T_s E_{n-s}\,,$$

tandis que nous aurons en soustrayant (10) de (15):

$$(17)\qquad (2n-1)2^{2n}E_{n-1} - (2^{2n}+4n-4)T_n = \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n-1}{2s-1}(2^{2s}-2)(2^{2n-2s}-2)2^{2n-2s}T_s B_{n-s}\,.$$

## § 22. Sur les produits $\varphi_n(x)\varphi_p(x)$, $\chi_n(x)\chi_p(x)$ et $\varphi_n(x)\chi_p(x)$.

Il est très facile de généraliser à un autre point de vue les formules (1) et (2) du paragraphe 21.

A cet effet, posons pour abréger:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1}B_s x^{n-2s}}{(2s)!\,(n-2s)!}\,,$$

$$g_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s T_{s+1} x^{n-2s-1}}{(2s+1)!\,(n-2s-1)!\,2^{2s+2}}\,,$$

nous aurons pour les $\varphi_n(x)$:

$$(1)\qquad \varphi_n(x) = f_n(x) + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!\,2}\,,\quad \varphi_n(x-1) = f_n(x) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!\,2}$$

et pour les $\chi_n(x)$:

$$(2)\qquad \chi_n(x) = \frac{x^n}{n!\,2} + g_n(x)\,,\quad \chi_n(x-1) = \frac{x^n}{n!\,2} - g_n(x)\,,$$

ce qui donnera immédiatement les trois équations aux différences finies

$$(3)\qquad \varphi_n(x)\varphi_p(x) - \varphi_n(x-1)\varphi_p(x-1) = \frac{x^{p-1}f_n(x)}{(p-1)!} + \frac{x^{n-1}f_p(x)}{(n-1)!}\,,$$

$$(4)\qquad \chi_n(x)\chi_p(x) - \chi_n(x-1)\chi_p(x-1) = \frac{x^n g_p(x)}{n!} + \frac{x^p g_n(x)}{p!}\,,$$

$$(6)\qquad \varphi_n(x)\chi_p(x) + \varphi_n(x-1)\chi_p(x-1) = \frac{x^p f_n(x)}{p!} + \frac{x^{n-1}g_p(x)}{(n-1)!}\,.$$

Cela posé, nous avons à étudier les trois développements suivants:

1° L'équation (3) donnera un développement de la forme

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_n(x)\varphi_p(x) &= K_{n,p} + \binom{n+p}{n}\varphi_{n+p}(x) + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1}B_s}{(2s)!}\binom{n+p-2s-1}{p-1}\varphi_{n+p-2s}(x) + \\ &+ \sum_{s=1}^{\leq \frac{p}{2}} \frac{(-1)^{s-1}B_s}{(2s)!}\binom{n+p-2s-1}{n-1}\varphi_{n+p-2s}(x), \end{aligned}\right.$$

où la constante $K_{n,p}$ se détermine comme suit:

Différentions par rapport à $x$ la formule (7), puis appliquons l'identité

$$D_x\big(\varphi_n(x)\varphi_p(x)\big) = \varphi_{n-1}(x)\varphi_p(x) + \varphi_n(x)\varphi_{p-1}(x),$$

nous aurons en développement, d'après la formule (7), les deux fonctions qui figurent au second membre

$$K_{n-1,p} + K_{n,p-1} = 0,$$

d'où immédiatement:

$$K_{n,p} = -K_{n+1,p-1} = (-1)^{p-1}K_{n+p-1,1}.$$

Or, nous aurons en posant dans (7) $p=1$, ce qui nous conduira à la formule (1) du paragraphe 21:

$$K_{2r-1,1} = \frac{(-1)^{r+1}B_r}{(2r)!}, \quad K_{2r,1} = 0,$$

de sorte que nous aurons pour $K_{n,p}$ la détermination suivante:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} K_{n,p} &= 0, & n+p &= 2k+1, \\ K_{n,p} &= \frac{(-1)^{n+k}B_k}{(2k)!}, & n+p &= 2k, \end{aligned}\right.$$

où $k$ désigne un positif entier.

Posons dans (7) particulièrement $p=n$, ce qui donnera $k=n$, nous aurons:

$$(9)\quad \big(\varphi_n(x)\big)^2 = \frac{B_n}{(2n)!} + \binom{2n}{n}\varphi_{2n}(x) + 2\cdot\sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1}B_s}{(2s)!}\binom{2n-2s-1}{n-1}\varphi_{2n-2s}(x),$$

tandis que l'hypothèse $p=n+1$ donnera:

$$(10)\quad \varphi_n(x)\varphi_{n+1}(x) = \binom{2n+1}{n}\varphi_{2n+1}(x) + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^{s-1}B_s}{(2s)!}\binom{2n-2s+1}{n}\varphi_{2n-2s+1}(x).$$

Remplaçons, dans (7), $x$ par le positif entier $q$, nous retrouvons un cas particulier d'une formule plus générale de M. E. Lampe [1]).

2° L'équation (4) donnera de même:

---

[2]) Journal de Crelle, t. 84, p. 270—272; 1878.

$$(11)\quad \begin{cases} \chi_n(x)\,\chi_p(x) = K_{n,p} + \sum\limits_{s=0}^{\leqq \frac{p-1}{2}} \dfrac{(-1)^s\,T_{s+1}}{(2s+1)!\,2^{2s+2}} \dbinom{n+p-2s-1}{n} \varphi_{n+p-2s}(x) + \\ + \sum\limits_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} \dfrac{(-1)^s\,T_{s+1}}{(2s+1)!\,2^{2s+2}} \dbinom{n+p-2s-1}{p} \varphi_{n+p-2s}(x), \end{cases}$$

où la constante $K_{n,p}$ peut être déterminée par la méthode appliquée dans le cas précédent; car en posant dans (8) $p=0$, on retrouve la formule (2) du paragraphe 20.

De cette manière nous trouvons ici:

$$(12)\quad \begin{cases} K_{n,p} = 0\,, \quad n+p = 2k+1\,, \\ K_{n,p} = \dfrac{(-1)^{n+k}\,T_{k+1}}{(2k+1)!\,2^{2k+2}}\,, \quad n+p = 2k\,, \end{cases}$$

où $k$ désigne par conséquent un positif entier.

Soit particulièrement $p=n$, $p=n+1$, nous aurons respectivement:

$$(13)\quad \big(\chi_n(x)\big)^2 = \frac{T_{n+1}}{(2n+1)!\,2^{2n+2}} + 2\cdot \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s\,T_{s+1}}{(2s+1)!\,2^{2s+2}} \binom{2n-2s-1}{n} \varphi_{2n-2s}(x)\,,$$

$$(14)\quad \chi_n(x)\,\chi_{n+1}(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s\,T_{s+1}}{(2s+1)!\,2^{2s+2}} \binom{2n-2s+1}{n+1} \varphi_{2n-2s+1}(x).$$

Quant à la formule (6), nous aurons:

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi_n(x)\,\chi_p(x) = \dbinom{n+p}{p} \chi_{n+p}(x) + \sum\limits_{s=1}^{\leqq \frac{n}{2}} \dfrac{(-1)^{s-1}B_s}{(2s)!} \dbinom{n+p-2s}{p} \chi_{n+p-2s}(x) + \\ + \sum\limits_{s=1}^{\leqq \frac{p+1}{2}} \dfrac{(-1)^{s-1}\,T_s}{(2s-1)!\,2^{2s}} \dbinom{n+p-2s}{n-1} \chi_{n+p-2s}(x)\,, \end{cases}$$

d'où en posant particulièrement $n=p+1$, puis remplaçant $p$ par $n$:

$$(16)\quad \varphi_{n+1}(x)\,\chi_n(x) = \binom{2n+1}{n} \chi_{2n+1}(x) + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^{s-1}\,2^{2s}B_s}{(2s)!} \binom{2n-2s+1}{n} \chi_{2n-2s+1}(x)\,;$$

car nous aurons évidemment:

$$\frac{T_s}{2^{2s}} + \frac{B_s}{2s} = \frac{2^{2s}B_s}{2s}\,.$$

Il est évident que les formules précédentes nous permettent de déduire un très grand nombre de formules récursives non linéaires, formules qui sont à considérer comme des inversions des formules contenues dans les deux paragraphes précédents.

Nous nous bornerons à citer les plus simples des formules en question:

1° Posons, dans (9), $x=0$, puis remplaçons $n$ par $2n$ respectivement par $2n+1$, nous trouvons les formules **100** et **101** de la Table.

2° La formule (13) donnera de même pour $x=0$ les formules **102** et **103** de la Table.

3° Posons, dans (10), $x=-\frac{1}{4}$, puis remplaçons $n$ par $2n$ respectivement par $2n+1$, nous trouvons les formules **104** et **105** de la Table.

4° En dernier lieu, la formule (16) donnera pour $x=0$ les formules **106** et **107** de la Table.

On voit que les formules **104** et **105** sont à considérer comme des formules récursives incomplètes pour les $E_n$.

---

# CHAPITRE VI.

## Théorèmes sur des nombres entiers.

### § 23. Applications des factorielles.

Je me suis proposé de développer, dans ce chapitre final, quelques résultats concernant la théorie des nombres, résultats qui se présentent comme des conséquences immédiates de nos recherches précédentes. Cependant je me réserve de revenir, à une autre occasion, à mes recherches ultérieures de ce sujet.

Nous commençons par une étude de la factorielle du rang $n$:

(1) $$\omega_n(x) = x(x+1)\dots(x+n-1);$$

posons

(2) $$\omega_n(x) = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} x,$$

les coefficients $C_n^p$ sont les coefficients de la factorielle du rang $n$; nous aurons particulièrement:

(3) $$C_n^0 = 1, \quad C_n^{n-1} = (n-1)!$$

Posons plus géneralement:

(4) $$\omega_n(x+a) = C_n^0(a)x^n + C_n^1(a)x^{n-1} + \dots + C_n^{n-1}(a)x + C_n^n(a),$$

nous verrons que $C_n^p(a)$ est, pour $1 \leqq p < n-1$, la somme de tous les produits formés de $p$ facteurs différents pris parmi les $n$ expressions

(5) $$a, a+1, a+2, \dots, a+n-1,$$

tandis que nous aurons particulièrement:

$$C_n^0(\alpha) = 1, \quad C_n^n(\alpha) = \omega_n(\alpha). \tag{6}$$

Cela posé, l'identité évidente

$$\omega_n(x+\alpha) - \omega_n(x+\alpha-1) = n\,\omega_{n-1}(x+\alpha)$$

donnera, en vertu du théorème I du paragraphe 2, le développement suivant:

$$\omega_n(x+\alpha) = f_n(\alpha) + n \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} (n-s-1)!\, C_{n-1}^s(\alpha)\,\varphi_{n-s}(x), \tag{7}$$

où $f_n(\alpha)$ est un polynome entier de $\alpha$.

Différentions maintenant $n-p$ fois par rapport à $x$ la formule (7), puis posons $x=0$, nous aurons la formule récursive pour les $B_n$:

$$\frac{n-p}{n} C_n^p(\alpha) = C_{n-1}^p(\alpha) + \frac{n-p}{2} C_{n-1}^{p-1}(\alpha) + \sum_{s=1}^{\leq \frac{p}{2}} (-1)^{s-1} \binom{n-p+2s-1}{2s} B_s C_{n-1}^{p-2s}(\alpha), \tag{8}$$

d'où particulièrement, en posant $\alpha = 0$, $p = n-1$, la formule de Schlömilch[1])

$$\frac{(n-2)\,(n-2)!}{2n} = \sum_{s=1}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^{s-1} B_s C_{n-1}^{n-2s-1}, \tag{9}$$

formule qui est retrouvée par M. A. Radicke[2]).

Nous obtenons d'autres formules récursives de ce genre en appliquant le polynome du degré $n$ par rapport à $x$:

$$\Omega_n(x) = \left(x + \frac{1}{n+1}\right)\left(x + \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(x + \frac{n}{n+1}\right), \quad n \geq 1, \tag{10}$$

qui satisfait évidemment à l'équation fonctionnelle:

$$(-1)^n \Omega_n(-x-1) = \Omega_n(x),$$

de sorte que nous aurons, en vertu du théorème I du paragraphe 8, ces deux développements:

$$\frac{1}{2}\Omega_n(x) = K_n + \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(n-2s-1)!\, C_{n+1}^{2s+1}}{(n+1)^{2s+1}} \varphi_{n-2s}(x), \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\Omega_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(n-2s)!\, C_{n+1}^{2s}}{(n+1)^{2s}} \chi_{n-2s}(x), \tag{12}$$

---

[1]) Archiv de Grunert, t. 9, p. 334; 1847.

[2]) Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, p. 15; Halle a. S. 1880.

où la constante $K_n$ qui figure au second membre de (11) satisfait à la condition

$$K_{2n+1} = 0.$$

Appliquons maintenant les formules (10) et (11) du paragraphe 8, nous aurons, en vertu de (11) et (12) ces deux formules récursives:

$$(13)\quad (n+1)\,C_{n+1}^{2p} = \frac{2}{n-2p}\left(C_{n+1}^{2p+1} + \sum_{s=1}^{s=p}(-1)^{s-1}\binom{n-2p+2s-1}{2s}(n+1)^{2s}B_s C_{n+1}^{2p-2s+1}\right),$$

$$(14)\quad 2^{2p}C_{n+1}^{2p+1} = (n+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=p}(-1)^s\binom{n-2p+2s}{2s+1}(n+1)^{2s}\,2^{2p-2s}\,T_{s+1}\,C_{n+1}^{2p-2s},$$

où il faut admettre, dans (13), $p \geqq 1$.

Posons encore dans (12) $x = -\frac{1}{2}$, puis remplaçons $n$ par $2n$, nous aurons, après une légère modification, la formule curieuse:

$$(15)\quad \left[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\right]^2 = (-1)^n(2n)!\,2^{2n} + \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s(2n+1)^{2n-2s}\,2^{2s}E_{n-s}\,C_{2n+1}^{2s}.$$

## § 24. Généralisation d'un théorème de Lipschitz.

Démontrons maintenant comment nos formules récursives nous conduisent immédiatement à des résultats intéressants concernant la nature algébrique des nombres de Bernoulli.

A cet effet, prenons pour point de départ la formule de G.-F. Meyer, savoir la formule 8 de la Table:

$$(1)\qquad (2n+1)\,B_n + \sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}2^{2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\left(2^{2n-2} - \frac{2n-1}{2}\right),$$

je dis que l'expression

$$(2)\qquad a_n = 3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)\cdot 2B_n$$

est, pour tous les $n$, un nombre entier impair.

En effet, la formule (1) donnera, en vertu de (2), une formule résursive de la forme

$$a_n + 4\cdot\sum_{s=1}^{s=n-1}A_s a_{n-s} = 2A'+1,$$

où $A'$ et les $A_s$ sont des nombres entiers.

Remarquons ensuite que nous aurons $a_1 = 1$; la conclusion ordinaire de $n$ à $n+1$ nous conduira immédiatement au but.

Cela posé, nous aurons une expression de la forme

$$(3)\qquad B_n = \frac{a_n}{2b_n},$$

où $a_n$ et $b_n$ sont des positifs entiers impairs, premiers entre eux.

De plus, nous aurons, en vertu de (2):

$$(4) \qquad 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1) \equiv 0 \pmod{b_n}.$$

Désignons ensuite par $2\,G_n$ le dénominateur général des $n$ premiers nombres de Bernoulli, savoir

$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ \ldots,\ B_n,$$

$G_n$ est un nombre impair qui n'est jamais divisible par un nombre premier plus grand que $2n+1$.

Or, il est très intéressant que la formule de Schlömilch, savoir la formule (9) du paragraphe 23, nous détermine immédiatement la valeur exacte de $G_n$.

En effet, remplaçons dans la formule susdite $n$ par $2n+2$, nous aurons, après une légère modification:

$$(5) \qquad \frac{(2n)!\,n}{2n+1} = (-1)^{n-1} B_n + \sum_{s=1}^{s=n-1} (-1)^{s-1} B_s\, C_{2n+1}^{2n-2s}.$$

Soit maintenant, dans (5), $2n+1$ un nombre composé: le premier membre de cette formule est un nombre entier, de sorte que nous aurons dans ce cas:

$$G_n = G_{n-1};$$

soit, au contraire, $2n+1$ un nombre premier, nous aurons:

$$G_n = (2n+1)\, G_{n-1},$$

d'où la proposition suivante:

I. Le nombre $G_n$ est précisément le produit de tous les nombres premiers qui ne dépassent pas $2n+1$, de sorte que le nombre impair $b_n$ qui figure dans le dénominateur de $B_n$ ne peut j'amais être divisible par un nombre carré plus grand que l'unité.

Cela posé, je dis que la formule (6) du paragraphe 13, savoir

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & p(p^{2n}-1) B_n + \sum_{r=1}^{r=n-1} (-1)^r \binom{2n}{2r} s_{2r}(p-1)(p^{2n-2r}-1) B_{n-r} = \\ & = (-1)^n \big(n(p-1)\, s_{2n-1}(p-1) - 2n\, s_{2n}(p-1)\big), \end{aligned} \right.$$

nous conduira au théorème suivant:

II. Désignons par $n$ et $p$ deux positifs entiers quelconques, l'expression

$$(7) \qquad c_n(p) = \frac{p^{n+1}(p^{2n}-1) B_n}{2n}$$

est toujours un nombre entier.

Il est évident qu'il suffit de considérer le cas où $p > 1$. Remarquons ensuite que

$$c_1(p) = \frac{(p-1)p^2(p+1)}{12}$$

est un nombre entier, puis supposons que les expressions

$$c_2(p),\ c_3(p),\ \ldots,\ c_{n-1}(p)$$

aient la même propriété: nous aurons, en multipliant par $p^n$ les deux membres de (6) et en appliquant l'identité évidente

$$(2n-2r)\binom{2n}{2r} = 2n\binom{2n-1}{2r},$$

pour les $c_n(p)$ la formule récursive

$$c_n(p)+\sum_{r=1}^{r=n-1}(-1)^r\binom{2n-1}{2r}s_{2r-1}(p-1)\,p^{r-1}\,c_{n-r}(p) =$$

$$= (-1)^n\left(\frac{p^n(p-1)}{2}s_{2n-1}(p-1)-p^n s_{2n}(p-1)\right),$$

ce qui nous conduira immédiatement au but.

On sait que Lipschitz[1]) a démontré que l'expression

$$\frac{p^{2n}(p^{2n}-1)B_n}{2n}$$

est toujours un nombre entier; ce théorème de Lipschitz appartient à ceux sur lesquels M. P. Bachmann[2]) remarque qu'ils „bisher auf rein arithmetische Weise nicht gewonnen werden konnten."

Soit $p$ de la forme $6m\pm1$, nous verrons par le même procédé que l'expression

$$\frac{p^{n-1}(p^{2n}-1)B_n}{2n} \tag{8}$$

est un nombre entier.

Remarquons que le dénominateur de $B_n$, dans la formule (3), est le produit de certains nombres premiers différents entre eux, le théorème II montrera que l'expression

$$d_n(p) = p(p^{2n}-1)B_n \tag{9}$$

est toujours un nombre entier, pourvu que $p$ le soit.

Cela posé, on voit que le nombre impair $b_n$ qui figure dans le dénominateur du second membre de (3) n'est divisible que par des nombres premiers de la forme $2\lambda+1$, où $\lambda$ est diviseur de $n$. Le théorème de v. Staudt et de Thomas Clausen montrera que $b_n$ est précisément le produit des nombres premiers susdits.

Appliquons maintenant la formule d'Euler[3])

$$T_n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{2n}, \tag{10}$$

nous aurons, en vertu de (9), la proposition suivante due à Worpitzky[4]):

---

[1]) Journal de Crelle, t. 96, p. 3; 1884.

[2]) Niedere Zahlentheorie, t. II, p. 31; Leipsic 1910.

[3]) Opuscula analytica, t. II, p. 273; Saint-Pétersbourg 1785.

[4]) Journal de Crelle, t. 94, p. 231; 1883.

III. Soit l'indice $n$ de la forme $n = 2^p(2q+1)$, le $n$-ième coefficient des tangentes $T_n$ est de la forme

$$T_n = 2^{2n-p-2}(2Q+1). \tag{11}$$

Euler[1]) indique que le nombre (9) pour $p=2$, savoir $d(2)$, est un nombre entier. Cependant, j'ignore s'il a connu le théorème III.

Soit enfin, dans (5), $2n+1$ un nombre premier, nous aurons, en multipliant par $2G_n$, la formule en question, une égalité de la forme

$$(2n)!\, 2n\, G_{n-1} = (-1)^{n-1} a_n + (2n+1) A,$$

où $A$ est un nombre entier; c'est-à-dire que le théorème de Wilson donnera la proposition suivante:

IV. Soit $2n+1$ un nombre premier, nous aurons toujours

$$a_n \equiv (-1)^{n-1} G_{n-1} \pmod{2n+1}. \tag{12}$$

## § 25. Théorèmes sur les nombres $s_n(p)$, $\sigma_n(p)$ et $C_n^p$.

Les résultats du paragraphe 13 nous conduiront en outre à une suite de résultats intéressants concernant les sommes $s_n(p)$ et $\sigma_n(p)$.

En effet, appliquons les formules (4) et (5) du paragraphe susdit, savoir

$$(p^{2n+1}-p)B_n + \sum_{r=1}^{r=n-1} (-1)^r \binom{2n}{2r} p^{2n-2r} s_{2r}(p-1) B_{n-r} = (-1)^n \big(s_{2n}(p-1) - np\, s_{2n-1}(p-1)\big),$$

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r \binom{2n+1}{2r+1} p^{2n-2r} s_{2r+1}(p-1) B_{n-r} = (-1)^n \left( s_{2n+1}(p-1) - \left(n+\frac{1}{2}\right) p\, s_{2n}(p-1)\right),$$

puis appliquons les formules élémentaires

$$s_1(p-1) = \frac{(p-1)p}{2}, \quad s_2(p-1) = \frac{(p-1)p(2p-1)}{6},$$

la conclusion ordinaire de $m$ à $m+1$ donnera immédiatement le théorème suivant:

I. Soit $n$ et $p$ deux positifs entiers quelconques, et soit $2G_n$ le dénominateur général des $n$ premiers nombres de Bernoulli, nous aurons toujours:

$$2G_n s_{2n}(p-1) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{1}$$

$$2G_n s_{2n+1}(p-1) \equiv 0 \pmod{p^2}. \tag{2}$$

Supposons que $p$ soit un nombre impair non divisible par les nombres premiers égaux à $2n+1$ au plus, le facteur $2G_n$ qui figure aux premiers membres des congruences (1) et (2) peut être supprimé.

---

[5]) Institutiones calculi differentialis, p. 495—496; Saint-Pétersbourg 1755.

Ces remarques faites, nous aurons la proposition suivante:

II. Soit $n$ un positif entier quelconque, et soit $p > 2n+1$ un nombre premier, nous aurons toujours:

$$s_{2n}(p-1) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{3}$$

$$s_{2n+1}(p-1) \equiv 0 \pmod{p^2}. \tag{4}$$

Quant aux sommes $\sigma_m(p-1)$, la formule d'Euler du paragraphe 4 donnera immédiatement le théorème analogue à I:

III. Soient $n$ et $p$ des positifs entiers quelconques, nous aurons toujours:

$$2^{2n-1}\sigma_{2n}(p-1) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{5}$$

$$2^{2n+1}\sigma_{2n+1}(p-1) \equiv (-1)^{n+1} T_{n+1} \pmod{p}. \tag{6}$$

On voit du reste que la congruence (5) est évidente pour une valeur impaire de $p$.

Discutons maintenant les résultats obtenus dans le paragraphe 23, la formule (8) donnera immédiatement:

IV. Soit $n$ un nombre premier impair, et soit $p$ un entier tel que $1 \leq p \leq n-2$, tous les coefficients du polynome $C_n^p(\alpha)$ sont divisibles par $n$.

Posons $\alpha = 0$, nous aurons, en vertu de IV, le théorème de Lagrange[1]):

V. Soit $n$ un nombre premier impair, et soit $p$ un entier tel que $1 \leq p \leq n-2$, nous aurons toujours:

$$C_n^p \equiv 0 \pmod{p}. \tag{7}$$

C'est un fait bien connu que Lagrange, en appliquant ses congruences (7), a démontré en même temps les théorèmes de Fermat et de Wilson.

Appliquons le théorème de Lagrange, nous aurons, en vertu de la formule (14) du paragraphe 23, l'autre théorème:

VI. Soit $2n+1 > 3$ un nombre premier, et soit $p$ un nombre entier tel que $1 \leq p \leq n-1$, nous aurons toujours:

$$C_{2n+1}^{2p+1} \equiv 0 \quad \left(\mathrm{mod}\ (2p+1)^2\right). \tag{8}$$

Supposons $p = n-1$, le cas particulier correspondant de la congruence (8) est bien connu[2]). Dans une Note datant de ma jeunesse, j'ai démontré, il y a trente ans à peu près, la congruence générale (8)[3]); cependent je ne veux pas pretendre que la formule générale (8) m'appartienne[4]).

Comme une autre conséquence de la congruence de Lagrange nous aurons, en vertu de la formule récursive (15) du paragraphe 23, la proposition suivante:

VII. Soit $2n+1 > 3$ un nombre premier, nous aurons toujours:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) \equiv (-1)^n n!\, 2^{3n} \quad \left(\mathrm{mod}\ (2n+1)^3\right). \tag{9}$$

---

[1]) Mémoires de l'Académie de Berlin t. 2 (1771), p. 125—137; 1773.

[2]) E. Rieke: Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 34, p. 190—191; 1889. C. Leudesdorf: Proceedings of the London Math. Society, t. 20, p. 199—212; 1889. R. E. Allardice: Edinbourgh math. Soc. Proceedings, t. 8, p. 16—19; 1890.

[3]) Voir ma Note insérée dans: Nyt Tidsskrift for Matematik t. 4, p. 1—10; 1893.

[4]) Comparer ma Note dans: Nyt Tidsskrift for Matematik, t. 21, p. 8—10; 1910.

# TABLE

des

# simples formules récursives.

Il faut remarquer que cette Table ne contient que des formules récursives d'une forme simple. La plupart de ces formules sont obtenues en donnant, dans des formules beaucoup plus générales, à un paramètre des valeurs particulières.

## I. Formules récursives linéaires.

### 1. Formules contenant les $B_n$.

*1. $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\left(n-\frac{1}{2}\right).$$

*2. $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+2}{2s+2}B_{n-s} = (-1)^{n-1}n.$$

*3. $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+2}B_{n-s} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}.$$

*4. $$(2n+1)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}B_{n-s} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}.$$

*5. $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}2^{2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\left((2n-3)\,2^{2n-2}+\frac{2n+1}{2}\right).$$

*6. $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+2}{2s+2}2^{2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\left((n-1)\,2^{2n-1}+\frac{n+1}{2}\right).$$

7. $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+2}2^{2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\left(2^{2n-2}-\frac{n}{2}\right).$$

*8. $$(2n+1)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}2^{2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\left(2^{2n-2}-\frac{2n-1}{2}\right).$$

*9. $$(2^{2n+1}-2)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}2^{2n-2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}(2n-1).$$

*10. $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}2^{2n-2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}2n.$$

$$*11. \quad \left((2n-1)\,2^{2n}+2\right)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}2^{2n-2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}.$$

$$*12. \quad (2^{2n+1}-2)\,B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s}2^{2n-2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}.$$

$$13. \quad (2^{2n+1}-2)\,B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}3^{2s}2^{2n-2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\left((2n-3)\,3^{2n-1}+4n\right).$$

$$14. \quad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}3^{2s}2^{2n-2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\left((2n-2)\,3^{2n-1}+\frac{4n+2}{3}\right).$$

$$15. \quad \left((2n-1)\,2^{2n}+2\right)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}3^{2s}2^{2n-2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\left(3^{2n-1}-\frac{8n-2}{3}\right).$$

$$16. \quad (2^{2n+1}-2)\,B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s}3^{2s}2^{2n-2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\left(3^{2n-2}-(8n-6)\right).$$

$$*17. \quad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}4^{2n-2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}(4n+1)+(2n+1)\,E_n.$$

$$18. \quad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}4^{2n-2s}3^{2s+1}B_{n-s} = (-1)^{n-1}(4n-1)\,3^{2n}-(2n+1)\,E_n.$$

$$*19. \quad (2^{2n}+2)\,(2^{2n}-1)\,B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}4^{2n-2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}(4n-1).$$

$$*20. \quad (2^{2n}+2)\,(2^{2n}-1)\,B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}4^{2n-2s}3^{2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}(4n-3)\,3^{2n-1}.$$

$$21. \quad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}4^{2n-2s}5^{2s+1}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\left((4n-3)\,5^{2n}+(8n+4)\right)+(2n+1)\,E_n.$$

$$22. \quad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}4^{2n-2s}7^{2s+1}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\left((4n-5)\,7^{2n}+(8n+4)\,3^{2n}\right)-(2n+1)E_n.$$

$$23. \quad (2^{2n}+2)\,(2^{2n}-1)\,B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}4^{2n-2s}5^{2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\left((4n-5)\,5^{2n-1}+8n\right).$$

$$24. \quad (2^{2n}+2)\,(2^{2n}-1)\,B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}4^{2n-2s}7^{2s}B_{n-s} =$$
$$= (-1)^{n-1}\left((4n-7)\,7^{2n-1}+8n\cdot 3^{2n-1}\right).$$

**25.** $\frac{3}{2}(3^{2n}-1)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}3^{2n-2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}(3n-1).$

**26.** $\frac{3}{2}(3^{2n}-1)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}3^{2n-2s}2^{2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}(3n-2)2^{2n-1}.$

**27.** $\frac{3}{2}(3^{2n}-1)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}3^{2n-2s}4^{2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\big((3n-4)4^{2n-1}+6n\big).$

**28.** $\frac{3}{2}(3^{2n}-1)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}3^{2n-2s}5^{2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}\big((3n-5)5^{2n-1}+6n\cdot 2^{2n-1}\big).$

**29.** $\left(\frac{(3^{2n}+3)(2^{2n}+2)-12}{2}\right)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}6^{2n-2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}(6n-1).$

**30.** $\big((3^{2n}+3)(2^{2n-1}+1)-6\big)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}6^{2n-2s}5^{2s}B_{n-s} = (-1)^{n-1}(6n-5)5^{2n-1}.$

**31.** $\big((3^{2n}+3)(2^{2n-1}+1)-6\big)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}6^{2n-2s}7^{2s}B_{n-s} =$

$= (-1)^{n-1}\big((6n-7)7^{2n-1}+12n\big).$

**32.** $\big((3^{2n}+3)(2^{2n-1}+1)-6\big)B_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}6^{2n-2s}11^{2s}B_{n-s} =$

$= (-1)^{n-1}\big((6n-11)11^{2n-1}+12n\cdot 5^{2n-1}\big).$

## 2. Formules contenant les $T_n$.

***33.** $\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}T_{n-s} = E_n+(-1)^{n-1}.$

***34.** $\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s}T_{n-s} = (-1)^{n-1}.$

***35.** $\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s+1}T_{n-s} = E_n.$

***36.** $T_{n+1}-\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+2}T_{n-s} = E_n.$

***37.** $\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}2^{2s}T_{n-s} = (-1)^{n-1}2^{2n-1}.$

*38. $2T_{n+1}+\sum_{s=1}^{s=n}(-1)^s\binom{2n+1}{2s}2^{2s}T_{n-s+1}=(-1)^n2^{2n+1}.$

*39. $2n\,T_{n+1}+\sum_{s=1}^{s=n}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}2^{2s}T_{n-s+1}=0.$

*40. $2T_{n+1}+\sum_{s=1}^{s=n}(-1)^s\binom{2n}{2s}2^{2s}T_{n-s+1}=0.$

41. $\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}3^{2s+1}T_{n-s}=-E_n-(-1)^n(3^{2n}-2).$

42. $\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s}3^{2s}T_{n-s}=(-1)^{n-1}(3^{2n-1}-2).$

43. $\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s+1}3^{2s+1}T_{n-s}=-E_n+(-1)^{n-1}4.$

44. $T_{n+1}-\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+2}3^{2s+2}T_{n-s}=-3E_n+(-1)^n4.$

45. $\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}4^{2s}T_{n-s}=(-1)^{n-1}(4^{2n-1}-2^{2n-1}).$

46. $\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+2}4^{2s}T_{n-s}=(-1)^{n-1}(4^{2n-1}-2^{2n-2}).$

47. $2n\,T_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s+1}4^{2s}T_{n-s}=(-1)^{n-1}2^{2n-1}.$

48. $\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+2}4^{2s}T_{n-s}=(-1)^{n-1}2^{2n-2}.$

49. $\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s+1}5^{2s+1}T_{n-s}=E_n+(-1)^{n-1}4(3^{2n-1}-2).$

50. $T_{n+1}-\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+2}5^{2s+2}T_{n-s}=5E_n+(-1)^n4(3^{2n}-2).$

51. $2n\,T_{n+1}+\sum_{s=1}^{s=n}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}6^{2s}T_{n-s+1}=\frac{(-1)^n8}{3}(4^{2n}-2^{2n}).$

52. $2\,T_{n+1}+\sum_{s=1}^{s=n}(-1)^s\binom{2n}{2s}6^{2s}T_{n-s+1}=(-1)^n(4^{2n+1}-2^{2n+3}).$

53. $$\frac{3^{2n}+3}{2}T_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s}3^{2n-2s}2^{2s}T_{n-s} = (-1)^{n-1}3\cdot 2^{2n-1}.$$

54. $$\frac{3^{2n+1}-3}{2}T_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s}3^{2n-2s}4^{2s}T_{n-s} = (-1)^{n-1}3\cdot 4^{2n-1}.$$

55. $$\frac{3^{2n+1}-3}{2}T_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s}3^{2n-2s}8^{2s}T_{n-s} = (-1)^{n-1}3(8^{2n-1}-2^{2n}).$$

56. $$\frac{3^{2n}+3}{2}T_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s}3^{2n-2s}10^{2s}T_{n-s} = (-1)^{n-1}3(10^{2n-1}-2^{4n-1}).$$

## 3. Formules contenant les $E_n$.

*57. $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}E_{n-s} = (-1)^{n-1}.$$

*58. $$\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^{s-1}\binom{2n-1}{2s-1}E_{n-s} = T_n+(-1)^n.$$

*59. $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n-1}{2s}E_{n-s} = T_n.$$

*60. $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}E_{n-s} = T_{n+1}.$$

*61. $$2E_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}2^{2s}E_{n-s} = (-1)^{n-1}(2^{2n}-2).$$

*62. $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n+1}{2s+1}2^{2s}E_{n-s} = (-1)^{n-1}(2^{2n}-1).$$

*63. $$(2n-1)E_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s+1}2^{2s}E_{n-s} = (-1)^{n-1}.$$

*64. $$2E_n+\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)_s\binom{2n-1}{2s}2^{2s}E_{n-s} = (-1)^{n-1}\cdot 2.$$

65. $$\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{2s}3^{2s}E_{n-s} = (-1)^n(2^{2n+1}-3^{2n}).$$

$$66.\quad \sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^{s-1}\binom{2n-1}{2s-1}3^{2s-1}E_{n-s} = -T_n + (-1)^n(3^{2n-1}-2^{2n}).$$

$$67.\quad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^{s}\binom{2n-1}{2s}3^{2s}E_{n-s} = -3T_n - (-1)^n 2^{2n}.$$

$$68.\quad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^{s}\binom{2n}{2s+1}3^{2s+1}E_{n-s} = -T_{n+1} - (-1)^n 2^{2n+1}.$$

$$69.\quad (2n+1)E_n + \sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^{s}\binom{2n}{2s+1}4^{2s}E_{n-s} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}(3^{2n}-3).$$

$$70.\quad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^{s}\binom{2n+1}{2s+2}4^{2s}E_{n-s} = \frac{(-1)^{n-1}}{8}(3^{2n+1}-3).$$

$$71.\quad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^{s}\binom{2n-1}{2s}5^{2s}E_{n-s} = 5T_n + (-1)^{n-1}(2^{2n-1}-3)2^{2n}.$$

$$72.\quad \sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^{s}\binom{2n}{2s+1}5^{2s+1}E_{n-s} = T_{n+1} + (-1)^{n-1}(2^{2n}-3)2^{2n+1}.$$

$$73.\quad \sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^{s-1}\binom{2n-1}{2s-1}3^{2n-2s}E_{n-s} = \frac{3^{2n}-3}{6}T_n + (-1)^n.$$

$$74.\quad \sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^{s-1}\binom{2n-1}{2s-1}3^{2n-2s}5^{2s-1}E_{n-s} = \frac{3^{2n}-3}{6}T_n + (-1)^n(5^{2n-1}-2^{2n}).$$

$$75.\quad \sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^{s-1}\binom{2n-1}{2s-1}3^{2n-2s}7^{2s-1}E_{n-s} = -\frac{3^{2n}-3}{6}T_n + (-1)^n(7^{2n-1}-2^{4n-1}).$$

## 4. Exemples des formules irrégulières.

$$76.\quad \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s(2n+1)}{(4n-2s+1)2^{4s}}\binom{4n-2s+1}{2s+1}B_{n-s} = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2^{4n-2}}.$$

$$77.\quad \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s 2n}{4n-2s-1}\binom{4n-2s-1}{2s+1}T_{n-s} = 1-(-1)^n.$$

$$78.\quad \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s(2n-1)}{(2n-s-1)2^{2s}}\binom{4n-2s-2}{2s}T_{n-s} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}}.$$

$$79.\quad \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s n}{(2n-s)2^{2s}}\binom{4n-2s}{2s}E_{n-s} = \frac{1-(-1)^n}{2^{2n}}.$$

$$80.\quad \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s(2n+1)}{4n-2s+1}\binom{4n-2s+1}{2s+1}E_{n-s} = (-1)^n\omega_n,$$

$$\omega_{3n}=0,\quad \omega_{3n+1}=-3,\quad \omega_{3n+2}=0.$$

### 5. Formules linéaires incomplètes.

$$*81.\quad \sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}}(-1)^s\binom{n}{2s+1}\frac{B_{n-s}}{n-s} = \frac{n!\,n!}{(2n+1)!}.$$

$$*82.\quad \sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}(-1)^s\binom{n+1}{2s+1}(2n-2s+1)B_{n-s} = 0,\quad (n\geqq 2).$$

$$*83.\quad \sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}}(-1)^s\binom{n}{2s+1}2^{4s}T_{n-s} = 2^{2n-2}.$$

$$*84.\quad \sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}(-1)^s\binom{n}{2s}(n-s)2^{2s}T_{n-s} = 0,\quad (n\geqq 2).$$

$$*85.\quad \sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}(-1)^s\binom{n}{2s}2^{2s}E_{n-s} = 1.$$

---

## II. Formules récursives non linéaires.

### 6. Formules de première espèce.

$$*86.\quad \sum_{s=1}^{s=n-1}\binom{2n}{2s}B_sB_{n-s} = (2n+1)B_n.$$

$$87.\quad \sum_{s=1}^{s=n-1}\binom{2n}{2s}2^{2s}B_sB_{n-s} = (2^{2n}+2n)B_n.$$

$$88.\quad \sum_{s=1}^{s=n}\binom{2n+1}{2s-1}T_sB_{n-s+1} = T_{n+1}-\left(n+\frac{1}{2}\right)E_n.$$

$$*89.\quad \sum_{s=1}^{s=n-1}\binom{2n-1}{2s}2^{2s}B_sT_{n-s} = T_n.$$

$$*90.\quad \sum_{s=1}^{s=n-1}\binom{2n-1}{2s}2^{4s}B_sT_{n-s} = 2nT_n.$$

*91. $$\sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{2n}{2s+1} T_{s+1} T_{n-s} = T_{n+1}.$$

*92. $$\sum_{s=1}^{s=n} \binom{2n}{2s-1} 2^{2s} T_s T_{n-s+1} = 2^{2n+1} E_n.$$

*93. $$\sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n}{2s} E_s B_{n-s} = E_n - nT_n.$$

94. $$\sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n}{2s} 2^{2s} B_s E_{n-s} = E_n - 2(2^{2n}-1) B_n.$$

95. $$\sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n}{2s} 2^{4s} B_s E_{n-s} = (2n+1) E_n - (2^{2n}-1)(2^{2n}+2) B_n.$$

*96. $$\sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n-1}{2s} E_s T_{n-s} = E_n - T_n.$$

97. $$\sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n-1}{2s} 2^{2s} E_s T_{n-s} = (2^{2n-1}-2) T_n.$$

98. $$\sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n-1}{2s} 2^{2n-2s} T_s E_{n-s} = \frac{2^{2n-1}-2}{2n} T_n.$$

*99. $$\sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n}{2s} E_s E_{n-s} = T_{n+1} - 2E_n.$$

## 7. Formules de seconde espèce.

100. $$\left(\binom{4n}{2n} - 1\right) B_{2n} + \binom{4n}{2n} B_n^2 = 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \binom{4n}{2s} \binom{4n-2s-1}{2n-1} B_s B_{2n-s}.$$

101. $$\left(\binom{4n+2}{2n+1} + 1\right) B_{2n+1} = 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \binom{4n+2}{2s} \binom{4n-2s+1}{2n} B_s B_{2n-s+1}.$$

102. $$T_{2n} = (4n-1)\binom{4n-2}{2n-1} T_n^2 - 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \binom{4n-1}{2s-1} \binom{4n-2s-1}{2n-1} 2^{4n-2s} T_s B_{2n-s}.$$

103. $$T_{2n+1} = 2 \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{4n+1}{2s+1} \binom{4n-2s-1}{2n} 2^{4n-2s} T_{s+1} B_{2n-s}.$$

104. $$\binom{4n+1}{2n} E_{2n} = \binom{4n}{2n} (2^{2n}-2) B_n E_n + \sum_{s=1}^{s=n} \binom{4n}{2s} \binom{4n-2s+1}{2n} 2^{4s} B_s E_{2n-s}.$$

**105.** $\binom{4n+3}{2n+1} E_{2n+1} =$

$$= \binom{4n+2}{2n} (2^{2n+2} - 2) B_{n+1} E_n + \sum_{s=1}^{s=n+1} \binom{4n+2}{2s} \binom{4n-2s+3}{2n+1} 2^{4s} B_s E_{2n-s+1}.$$

**106.** $\binom{4n-1}{2n-1} T_{2n} = -\binom{4n-1}{2n-1} 2^{2n} B_n T_n + \sum_{s=1}^{s=n} \binom{4n-1}{2s} \binom{4n-2s-1}{2n-1} 2^{4s} B_s T_{2n-s}.$

**107.** $\binom{4n+1}{2n} T_{2n+1} = \sum_{s=1}^{s=n} \binom{4n+1}{2s} \binom{4n-2s+1}{2n} 2^{4s} B_s T_{2n-s+1}.$

# Corrections et remarques historiques.

Quoique mes citations précédentes sont conformes aux indications données généralement dans des Mémoires récents, dans des Monographies, dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* etc., mes études plus approfondies de la littérature très riche et très étendue sur les nombres de BERNOULLI entraînent néanmoins, nous le verrons, beaucoup de corrections.

C'est-à-dire qu'il est nécessaire de revoir profondement, à ce point de vue aussi, la théorie des nombres de BERNOULLI et d'EULER.

---

Page 287 (5): Les premières formules récursives pour les $B_n$, dont les indices forment une série arithmétique ayant une différence plus grande que l'unité, savoir la valeur 2, semblent être dues à KNAR [1]).
Contemporainement KRONECKER [2]) a publié des formules récursives pour les $B_n$ et les $T_n$ qui donnent comme des cas particuliers des formules récursives pour les $B_n$ et $T_n$, dont les indices sont divisibles par le positif entier quelconque $k$. Cependant, KRONECKER ne mentionne pas les formules particulières de ce genre.[3])
F.-J. VAN DEN BERG [4]) a trouvé une formule récursive pour les $B_n$, dont les indices forment une série arithmétique quelconque, et il a indiqué des exemples de formules analogues pour les $T_n$ et les $E_n$, dont les indices forment des séries arithmétiques ayant la différence 2 ou 3.
Les frères MM. J.-C. KAPTEYN et W. KAPTEYN [5]) ont retrouvé les formules particulières de VAN DEN BERG, tandis que M. HAUSSNER a retrouvé les formules générales concernant les $B_n$ et trouvé les formules générales correspondantes pour les $T_n$ et les $E_n$.
Les belles découvertes de KNAR et de VAN DEN BERG semblent être inaperçues jusqu'ici.[6])

Page 295 (13): La fonction considérée par JACOBI

$$\varphi_{2n}(x) + \frac{(-1)^n B_n}{(2n)!}$$

est essentielle dans les recherches de KUMMER [7]) sur l'équation indéterminée de FERMAT:

$$x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda.$$

---

[1]) Archiv de Grunert, t. 27, p. 455—456; 1856.

[2]) Journal de Liouville (2) t. 1, p. 385—391; 1856.

[3]) Ni dans la Note originelle ni dans ses remarques insérées dans le Journal de Crelle, t. 94, p. 268—269; 1883. Comparez du reste mon Mémoire récent dans: *Berichte der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, t. 65, p. 25; 1913.

[4]) Verslagen en mededeelingen der koninklijke Akademie Amsterdam (2) t. 16, p. 74—176; 1881.

[5]) Wiener Sitzungsberichte t. 93 II, p. 836; 1886.

[6]) Voir par exemple: Correspondance d'HERMITE et de STIELTJES, t. II, p. 432; 1905. Il est très regrettable que le collaborateur du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* ne dit rien sur la forme singulière des formules de VAN DEN BERG; voir t. 13, p. 193.

[7]) Journal de Crelle, t. 40, p. 119; 1850.

Page 298 (16): La formule (7) doit être:

$$E_n = (-1)^n (2n)!\, 2^{2n+1} \chi_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right), \quad n \geq 1,$$

comme le montrent clairement les deux formules suivantes (8) et (9).

Page 301 (19): Posons dans (1) $x = 0$, puis remplaçons $n$ par $2n$, il résulte

$$\sum_{s=1}^{s=p-1} \left( \varphi_{2n}(0) - \varphi_{2n}\left(-\frac{s}{p}\right)\right) = \frac{(-1)^n (p^{2n}-1) B_n}{(2n)!\, p^{2n-1}};$$

cette formule, trouvée par KUMMER [1]), est essentielle dans ses recherches susdites.

Page 315 (33): La formule **10** d'EULER joue aussi un rôle dans les recherches de KUMMER [2]). La formule eulérienne susdite est souvent attribuée [3]) à GRUNERT [4]), qui a démontré la formule à l'aide de celle de MOIVRE, savoir la formule **1** de la Table.

Page 331 (49): La formule (4) est trouvée aussi par HERMITE [5]).

Page 332 (50) § 17: Il semble être complètement inaperçu jusqu'ici qu' ANDREAS V. ETTINGSHAUSEN [6]) a découvert, déjà en 1827, c'est-à-dire un demi-siècle avant SEIDEL et STERN, les formules récursives incomplètes pour les $B_n$ qui correspondent à $q = 1$.

La démonstration de v. ETTINGSHAUSEN est entièrement élémentaire; car elle n'applique que les fondements du calcul des différences finies.

Page 345 (63): Déjà en 1875 LUCAS [7]) a développé le produit $s_m s_n$ selon des $s_q$, savoir le produit $\varphi_m(x)\varphi_n(x)$ selon des $\varphi_q(x)$.

Page 350 (68): Il est très intéressant, ce me semble, que la formule essentielle (6) est la même que celle de KUMMER mentionnée dans la Note à la page 301.

Page 351 (69): Le théorème concernant le produit

$$\frac{p^{2n}(p^{2n}-1) B_n}{2n}$$

est dû à SYLVESTER [8]); mais quoique LIPSCHITZ [9]) a proclamé la priorité de l'éminent géomètre anglais, on [10]) désigne néanmoins généralement le théorème en question comme appartenant à LIPSCHITZ.

Page 352 (70): Le théorème III appartient à STERN [11]).

Page 353 (71): Le théorème VI se trouve dans un Mémoire de M. J.-W.-L. GLAISHER [12]); il attribue à WOLSTENHOLME [13]) le cas particulier $p = n - 1$. Curieusement M. GLAISHER désigne le théorème V de LAGRANGE comme appartenant à FERRERS!

Page 361 (79): La formule **98** doit être biffée; elle n'est qu'une forme inexacte de **97**.

---

[1]) loc. cit. p. 120—121.

[2]) loc. cit. p. 121.

[3]) Voir par exemple GÖPEL dans Grunert Archiv t. 3, p. 66; 1843.

[4]) Mathematische Abhandlungen p. 57—59; Altona 1822.

[5]) Comptes rendus du troisième Congrès Scientifique, Bruxelles 1894.

[6]) Vorlesungen über die höhere Mathematik, t. I, p. 284—285; Vienne 1827.

[7]) Nouvelles Annales (2) t. 14, p. 487—494; 1875.

[8]) Philosophical Magazine, février 1861.

[9]) Bulletin de Darboux (2) t. 10, p. 141; 1886.

[10]) Voir par exemple M. P. BACHMANN: Niedere Zahlentheorie, t. II, p. 33; Leipsic 1910.

[11]) Journal de Crelle, t. 88. p. 92; 1880.

[12]) Quarterly Journal of Mathematics, t. 31, pp. 1—35, 321—353; 1899—1900.

[13]) Ibid. t. 5, p. 35—39; 1862.

# Table des matières.

CHAPITRE V.

## Formules récursives non linéaires.



CHAPITRE VI.

## Théorèmes sur des nombres entiers.



# Table des simples formules récursives.

### I. Formules récursives linéaires.



### II. Formules récursives non linéaires.